Systematische Darstellung

der Hauptsätze

der Geometrie im Raume,

von

Carl Julius Senff,
stud. phil.

Eine des Preises der silbernen Medaille und der Auszeichnung des Druckes auf Kosten der Universität am 12. December 1827 würdig erkannte Preisschrift.

Dorpat, 1829.
Gedruckt bei J. C. Schünmann, Universitäts-Buchdrucker.

46

Inhalt.

Einleitung.

I. Einige Definitionen.
II. Ueber die Symmetrie algebraischer Formeln.
III. Vorkenntnisse, geometrische, stereometrische und trigonometrische.
— — algebraische.

Die Geometrie im Raume.

§. 1 — 5. Bestimmung des Punktes durch ein Axensystem.
§. 6 — 13. Bestimmung der Lage und Richtung einer Linie.
§. 14 — 17. Bestimmung der Lage und Richtung einer Ebene.
§. 18 — 20. Bestimmung eines anderen Axensystems.
§. 21. Ueber die Bestimmung der Flächen, Linien und Punkte durch Gleichungen
§. 22 — 32. Aufgaben über eine gerade Linie.
§. 33 — 41. Aufgaben über die Verbindung mehrerer Linien.
§. 42 — 58. Aufgaben über die Ebene.
§. 59 — 64. Hauptsätze der Trigonometrie.
§. 65 — 70. Aufgaben über die Verbindung zweier Axensysteme.
§. 71 — 72. Bedingungen dreier, sich in einer Linie schneidenden Ebenen.

§. 73 — 77. Aufgaben über die Kugel.
§. 78 — 80. Gleichung des Cylinders.
§. 81. Gleichung der Ellipse.
§. 82 — 84. Gleichung des Kegels.
§. 85 — 86. Gleichung der Hyperbel und Parabel.
§. 87 — 100. Transformation der Gleichung vom zweiten Grade.
§. 101 — 120. Ueber die Flächen vom zweiten Grade.

Vorwort.

Seit Monge's Géométrie descriptive erschien, ist die Geometrie im Raume, als ein Theil dieses Werkes, allgemein als eigene abgesonderte Wissenschaft behandelt worden. Ihre auffallende Anwendbarkeit schaffte ihr bald einen Zutritt in allen französischen Schulen.

Synthetisch behandelt ist sie mit dem glücklichsten Erfolge zur Lösung der schwierigsten Constructionen, die in architectonischen und militärischen Zeichnungen vorkommen, angewandt worden. Rein analytisch behandelt bietet sie ein weit größeres, aber auch schwierigeres Feld dar. Die neuesten Werke darüber sind indessen noch wenig von der ersten Form abgewichen; eine neue Wendung erhält diese Wissenschaft durch die Einführung und zweckmäßige Bezeichnung der Determinanten *), welches Verdienst einzig dem Herrn Staatsrath Dr. Bartels zukommt; und mit Freude ergreife ich diese Gelegenheit, meinem geliebten Lehrer, durch den Fleiß den ich auf die Darstellung seiner Verbesserung wende, meine innige Dankbarkeit zu beweisen.

Die „Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géométrie par Cauchy" enthalten zwar fast dieselben Sätze, die man hier finden wird, in der Einleitung, allein ihnen fehlt noch die zweckmäßige

---

*) Siehe §. 9.

und einfache Bezeichnung, die eine klare Uebersicht über verwickelte Formeln so sehr erleichtert. Uebrigens kam dieses Werk auch erst 1826 zu Paris heraus, während der Professor Bartels schon seit einigen Jahren die Geometrie in dieser Form vorgetragen hatte.

Die Hauptsätze dieser Geometrie im Raume habe ich ganz so wiedergegeben, wie sie der Herr Professor Bartels seinen Schülern vorgetragen hat, und habe nur einige Zwischensätze (theils aus Bourdon's appl. de l'algébre à la géom. entlehnt) eingeschoben, weil Zwischensätze in der Mathematik, wie in der gewöhnlichen Rede, den Sprung vom Vordersatze zum Schluße erleichtern, und der Zweck dieser Arbeit nur möglichste Deutlichkeit seyn kann. In dem was über die Flächen vom zweiten Grade gesagt ist, habe ich mich hauptsächlich nach Bourdon gerichtet, und nur die Transformation der Gleichung vom zweiten Grade aus Bartels disquisitiones quatuor ad theor. functionum anal. pertinentes. Dorpati 1822. entlehnt.

Da die Geometrie im Raume analytisch behandelt werden sollte, habe ich durchaus keine Figuren dazu angewandt. In einigen Fällen hätte ich mit wenigern Worten auskommen können, wenn ich eine Figur oder vielmehr ein Modell zu Hülfe genommen hätte; und ich zweifle gar nicht, daß es bei einem Schulvortrage über diesen Gegenstand dienlich seyn würde, solche Modelle als letztes Hülfsmittel anzuwenden; vielmehr würde ich es für nothwendig halten, da ich aus eigner Erfahrung weiß, wie wenig es Jedem gegeben ist, sich mathematische Figuren zu denken: — ja selbst durch eine gezeichnete Figur, die auf einer Ebene darstellen soll, was in mehreren Ebenen liegt, nicht verwirrt zu werden. Diese Figuren müßten perspectivisch gezeichnet seyn, wenn sie einigermaßen ihren Zweck erfüllen sollten; da aber das Vorn und Hinten nicht immer allzudeutlich darin ausgedrückt werden darf, um zu starke Verzerrungen zu vermeiden, so würde doch jede Figur noch einer Zurechtweisung bedurft haben, und diese würde wohl oft mehr Worte gekostet haben, als bei gänzlichem Mangel der Figuren zur Deutlichkeit erforderlich sind.

Einleitung.

Diese Einleitung sei bestimmt: 1) einige Worte, die hier in einer bestimmten, nicht allgemein üblichen, Bedeutung gebraucht werden sollen, zu definiren; 2) einiges über die Symmetrie algebraischer Formeln und 3) die zu dieser Geometrie erforderlichen Vorkenntnisse voran zu schicken.

I.

1) Die bis jetzt gebräuchliche Definition des Begriffes Winkel war die Euklidische. Hier muß der Begriff ausgedehnt werden. Alle Linien die einerlei Richtung haben sind parallel; alle Linien die verschiedene Richtung haben, also nicht parallel sind, bilden einen Winkel (sie mögen in einer Ebene liegen oder nicht), und eben das Maß dieser Verschiedenheit der Richtung ist der Winkel. Oder mit andern Worten: wenn zwei Linien a, b im Euklidischen Sinne des Wortes einen Winkel ω bilden, also in einer Ebene liegen und sich schneiden, eine Linie c aber mit b parallel ist, ohne in dieser Ebene zu liegen; so wird hier eben sowohl gesagt werden a und c bilden den Winkel ω, wie a und b.

2) Die trigonometrischen Linien werden hier nur als Zahlen angesehen, wie es in den trigonometrischen Tafeln geschieht; so daß also der Sinus eines Winkels nicht das Perpendikel vom Endpunkte des einen Radius auf den andern Radius bedeutet, sondern nur die Verhältnißzahl der diesem Winkel gegenüberliegenden Cathete zur Hypothenuse; der Cosinus ist das Verhältniß der anliegenden Cathete zur

Hypothenuse, und die Tangente das Verhältniß der gegenüberstehenden Cathete zur anliegenden ꝛc.

3) Unter dem Worte Projection sey hier immer die orthographische Projection zu verstehen; das heißt, die Figur die in einer Ebene entsteht, wenn man aus jedem Punkte der zu projicirenden Figur Perpendikel auf die Ebene fällt. Ebenso kann man eine Linie auf eine andere projiciren, indem man Perpendikel aus allen Punkten der einen auf die andere fällt und dadurch ein Stück der andern abschneidet, welches eben die Projection der ersten ist.

II.

Einiges über die Symmetrie algebraischer Formeln.

Die Rechnung mit Buchstaben kann durch eine zweckmäßige Bezeichnung und Ordnung sehr erleichtert werden, und wenn gleich dadurch das Rechnen einen Anstrich von mechanischer Schreiberei gewinnt, so ist doch immer gerade genug dabei zu denken, daß man nicht, wie bei andern mechanischen Fertigkeiten, sein Produkt erhalten kann, ohne an den Grund des Verfahrens zu denken. Es kann hier gar nicht davon die Rede seyn, daß es dadurch eine geistlosere Sache werde; aber auf der andern Seite ist der Vortheil einer zweckmäßigen Wahl und Stellung der Buchstaben, besonders die Leichtigkeit mit der sich symmetrische Formeln dem Gedächtniße einprägen, so groß, daß es sich wohl der Mühe verlohnt, darüber etwas Ausführlicheres zu sagen.

Wenn algebraische Formeln, die eine gewisse Aehnlichkeit haben, mit unzweckmäßig gewählten Buchstaben bezeichnet sind, so muß man sie alle einzeln durchlesen und wohl mehrmals durchlesen, um die Regeln die darin obwalten zu erkennen; sind die Bezeichnungen aber zweckmäßig gewählt und geordnet, so kann man mit einem Blicke oft mehr übersehen und erkennen, als man bei mehrmaligen und aufmerksamen Durchlesen dieser Formeln finden würde. Man hat die Nothwendigkeit einer symmetrischen Bezeichnung schon lange erkannt, aber selten ist sie ausgeführt. In der Trigonometrie hat man z. B. schon lange die Seiten und die gegenüberstehenden Winkel mit gleichen Buchstaben aus verschiedenen Alphabeten bezeichnet. Man würde sogleich die Schwerfälligkeit und die Verwirrung empfinden, die aus unsymmetrischer Bezeichnung entstünde, wenn man bald Seiten, bald Winkel mit großen und kleinen Buchstaben bezeichnen wollte, oder gar statt des gegenüberstehenden

Winkels einen der anliegenden mit demselben Buchstaben bezeichnete; oder zur Bezeichnung der Winkel ganz willkührliche Buchstaben wählte, die mit der Benennung der Seiten gar nicht correspondirten. Bei ganz unharmonischen Größen, die in keiner Beziehung etwas Correspondirendes haben, ist freilich keine symmetrische Bezeichnung möglich, aber dergleichen Größen kommen auch höchst selten vor; in jeder zusammengesetzten Formel, in jeder Formel die einer praktischen Anwendung fähig ist, findet man wohl gleichartige Funktionen, wenigstens doch Größen von einer Dimension im Gegensatz von Größen einer andern Dimension; hier würde es also symmetrisch seyn, die homogenen Größen mit Buchstaben eines Alphabetes zu bezeichnen, und wenn die heterogenen Größen in irgend einer Rücksicht mit den früheren correspondiren, wie etwa Seiten und gegenüberstehende Winkel, im obigen Beispiele, so wäre es der Symmetrie angemessen, sie mit denselben Buchstaben eines andern Alphabets zu bezeichnen. Eine sehr zweckmäßige Bezeichnung für ähnliche Functionen haben die französischen Mathematiker eingeführt, und nach ihnen haben sie die übrigen Mathematiker angenommen. Sie besteht darin, daß der Buchstabe, welcher die Funktion eines Arguments bezeichnet, mit einem Apostroph versehen wird, wenn er dieselbe Funktion eines andern Arguments bezeichnet, so mit 2 auch 3 Häckchen verziert wird, je nachdem er eine dritte oder vierte ähnliche Funktion bezeichnet. Diese Häkchen will ich den Index des Buchstaben nennen, Buchstaben mit gleichen Indices wären also solche, die gleich viel Häkchen hätten.

Da die Symmetrie der Ausdrücke keinen andern Zweck hat, als die Uebersicht zu erleichtern, so muß man auch die willkührliche Ausnahme billigen, daß man, wo die Buchstaben x, y, z gebraucht werden, als correspondirende Buchstaben des griechischen Alphabets nicht ξ, υ, ζ gebraucht, sondern ξ, η, ζ, der ähnlichen Form wegen, und weil υ zu leicht mit dem lateinischen v zu verwechseln ist.

Ueber die symmetrische Bezeichnung läßt sich im Allgemeinen nicht viel sagen; aber es ist eine Sache die so leicht in die Augen fällt, daß man nicht leicht dagegen fehlen wird, wenn man nur die Absicht hat eine symmetrische Bezeichnung zu wählen, und im Laufe dieser Schrift werde ich in einigen Fällen andeuten, warum die Symmetrie gerade diese und keine andere Bezeichnung erfordert. Hier nur noch Einiges über die symmetrische Anordnung der Formeln in sich, wie der Formeln unter einander.

Bei der Anordnung der einzelnen Buchstaben in einer Formel dient die alphabetische Ordnung zur Richtschnur, wenn z. B. einzelne Buchstaben durch die Zeichen + oder — verbunden sind; so würde man nicht $b + a + c$ sondern $a + b + c$ schreiben. Wenn 3 Buchstaben in einer Formel so vorkommen, daß immer 2 mit einander verbunden sind, so ordnet man diese Paare nach dem fehlenden dritten Buchstaben, so daß z. B. $ab + cb + ca$ nicht symmetrisch geordnet wäre, sondern bc müßte die erste Größe seyn, weil sie mit dem fehlenden a correspondirt; dieser Ausdruck müßte also geschrieben werden $bc + ca + ab$. Dabei ist noch zu merken, daß man die Buchstaben in solchen Fällen immer cyklisch verfolgen muß, so daß ac nicht richtig wäre, weil a nach c folgt, wenn man den Cyklus vorwärts verfolgt; so wäre also der Ausdruck

$$(y - x)\,z + (y - z)\,x + y\,(x - z)$$

in vielfacher Rücksicht schlecht geordnet, und müßte heißen

$$x\,(y - z) - y\,(z - x) - z\,(x - y).$$

So ist es nicht cyklisch geordnet, wenn Bourdon *) die 3 Ebenen benennt YAZ, XAZ, XAY; die Reihenfolge ist ganz symmetrisch, da in der ersten das X, in der zweiten das Y und in der dritten das Z fehlt; aber wenn die Ordnung der Buchstaben cyklisch seyn sollte, so müßte die zweite Ebene ZAX benannt seyn.

Auch auf die symmetrische und cyklische Stellung der Exponenten, der positiven und negativen Größen, wie der verschiedenen Indices, muß man achten.

Dabei ist es unvermeidlich, daß oft eine Collision der Regeln entsteht, indem sich 2 Regeln widersprechen; da hängt es nun von der Willkühr ab, welcher Regel man den Vorzug geben will, und die größere Deutlichkeit und Leichtigkeit der Uebersicht muß dann als Richtschnur dienen; so wird z. B. in diesem Heftchen öfters der Ausdruck vorkommen

$$K = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'.$$

Dieser Ausdruck könnte mit demselben Rechte auch auf folgende Art geordnet werden

$$K = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - x'yz'' - xy''z'$$

$$\text{oder: } K = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - y''z'x - z''x'y.$$

*) Application de l'algébre à la géom. pag. 512.

In allen Ordnungen ist eine Regel der andern geopfert; aber ich werde mich immer des ersten Ausdrucks bedienen, weil er mir am leichtesten zu übersehen scheint.

Auch eine Reihe von gleichartigen Formeln kann und muß nach diesen Regeln geordnet werden. Ueberall aber hilft der natürliche Takt und das geübte Auge mehr als alle Regeln. In jedem einzelnen Falle kann man zwar die regelrechte Ordnung beschreiben, aber schwer allgemeine Regeln aufstellen, die auf jeden möglichen Fall unter den unendlichen Combinationen der Buchstaben passen könnten.

III.

Hier sollen die wenigen Sätze und Definitionen aus der Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie, wie auch die algebraischen Formeln, welche zum Verstehen dieser Geometrie im Raume erforderlich sind, aufgezählt werden; um dadurch zu zeigen, wie sehr diese Geometrie zu einem Vortrage in den obern Klassen unsrer Gymnasien geeignet ist. Daß ich nur die Sätze und die zu definirenden Begriffe in systematischer Ordnung aufzähle, ohne die Definitionen und Beweise der Sätze hinzuzufügen, bedarf wohl keiner Entschuldigung. Ausführlicher aber werde ich die algebraischen Formeln behandeln, weil ich hier einige Bezeichnungen einführen will, deren ich mich später bedienen werde. Dafür aber werde ich der ersten Anfangsgründe der Buchstabenrechnung nicht weiter erwähnen, da diese nach der jetzigen Organisation der Gymnasien schon in der dritten Klasse bis zu einer Stufe gelehrt werden, die hier gar nicht einmal nöthig wäre, um diese Geometrie zu verstehen.

1) Geometrische, stereometrische und trigonometrische Vorkenntnisse.

Definitionen. Körper, Fläche, Linie, Punkt, gerade Linie, Ebene, Winkel, Neben- und Scheitelwinkel, rechter, spitzer und stumpfer Winkel, Dreieck, Viereck, Polygon, regelmäßiges Polygon, Kreis, Eintheilung des Kreises, Maß der Winkel. — Grundsätze der Geometrie. — Bedingungen der Congruenz der Dreiecke. — Theorie der Parallellinie. — Summirung der Winkel, eines Dreiecks, Vierecks, Vielecks. — Maß der Flächen. — Bedingungen der Gleichheit, der Dreiecke, Parallelogramme. — Pythagoreischer Lehrsatz. — Bedingungen der Aehnlichkeit der Dreiecke. — Neigungswinkel einer Linie zu einer Ebene. — Perpendikel auf einer Ebene. — In einem Punkte ist nur ein Perpendikel auf einer Ebene möglich. — Neigungswinkel zweier Ebenen. — Bedingungen der Congruenz der Pyramiden,

der Prismen. — Maß der Körper. — Bedingungen der Gleichheit der Prismen, der Pyramiden. — Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe, also das dreifache Volum einer Pyramide gleich dem Produkte der Grundfläche und Höhe. — Definition des Sinus und Cosinus eines Winkels. — $1 = \text{Sin.}^2 + \text{Cos.}^2$. — Bestimmung der Positivität und Negativität des Sinus und Cosinus in den vier Quadranten. — Sinus und Cosinus der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel aus dem Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel zu finden. — Definition der Kugel, des größten Kreises, des sphärischen Dreiecks und der Winkel desselben.

Alle Sätze der Geometrie im Raume kann man mit Hülfe dieser wenigen Sätze der Geometrie und Stereometrie verstehen. Die ebene und sphärische Trigonometrie wird, wie man aus dem obigen Verzeichnisse sehen kann, keineswegs vorausgesetzt, sondern sie sollen erst mit Hülfe der Geometrie im Raume entwickelt werden.

2) Algebraische Vorkenntnisse.

Außer den ersten Regeln der Buchstabenrechnung gehören, als Vorschule zur Geometrie im Raume, noch folgende 6 Sätze hierher.

1) Wenn $ax + by + cz = 0$

$ax' + by' + cz' = 0$ so verhält sich

$$a : b : c = yz' - zy' : zx' - xz' : xy' - yx',$$

denn wenn man die erste Gleichung mit y', die zweite mit y multiplizirt und dann die zweite von der ersten abzieht, so erhält man:

$$a(xy' - yx') + c(y'z - z'y) = 0$$

also $a(xy' - yx') = c(yz' - zy')$ folglich verhält

sich $a : c = yz' - zy' : xy' - yx'$.

Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß das Verhältniß von b zu a oder c das oben angegebene ist.

Größen dieser Form werde ich mit dem großen Buchstaben, der mit dem darin fehlenden kleinen correspondirt bezeichnen, und ihm den Index anhängen, der in der Größe nicht vorkommt *). (Statt der griechischen großen Buchstaben werde

*) Hier wird supponirt, daß in jeder Rechnung die Indices 0, 1 und 2 vorkommen; wie das denn auch meistens der Fall ist.

ich, um häufige Verwechselungen zu vermeiden, die teutschen ihnen entsprechenden wählen.) So würde also $yz' - zy'$ durch X'' ausgedrückt werden, weil sowohl der Buchstabe x als der Index 2 in dieser Größe fehlen.

Will man umgekehrt die Größe selbst für einen solchen Stellvertreter schreiben, so muß man, wie aus dem vorhergehenden folgt, die andern beiden Buchstaben mit ihrem Indices in cyklischer Ordnung folgen lassen, und dann zum zweiten Theil der Größe dieselben Buchstaben umtauschen, aber die Indices in derselben Ordnung lassen, so würde also Y' die Größe $z''x - x''z$ repräsentiren.

Schema dieser Bezeichnung.

$$X = y'z'' - z'y'' \quad X' = y''z - z''y \quad X'' = yz' - zy'$$
$$Y = z'x'' - x'z'' \quad Y' = z''x - x''z \quad Y'' = zx' - xz'$$
$$Z = x'y'' - y'x'' \quad Z' = x''y - y''x \quad Z'' = xy' - yx'$$
$$\mathfrak{X} = \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' \quad \mathfrak{X}' = \eta''\zeta - \zeta''\eta \quad \mathfrak{X}'' = \eta\zeta' - \zeta\eta'$$
$$\mathfrak{Y} = \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' \quad \mathfrak{Y}' = \zeta''\xi - \xi''\zeta \quad \mathfrak{Y}'' = \zeta\xi' - \xi\zeta'$$
$$\mathfrak{Z} = \xi'\eta'' - \eta'\xi'' \quad \mathfrak{Z}' = \xi''\eta - \eta''\xi \quad \mathfrak{Z}'' = \xi\eta' - \eta\xi'$$

2) Folgende sechs Gleichungen haben einen gleichen Werth, d. h. ihre Summe ist eine constante Größe.

$$xX + yY + zZ$$
$$x'X' + y'Y' + z'Z'$$
$$x''X'' + y''Y'' + z''Z''$$
$$xX + x'X' + x''X''$$
$$yY + y'Y' + y''Y''$$
$$zZ + z'Z' + z''Z''$$

Denn setzt man statt der Größen X, Y, Z mit den Indices 0, 1 und 2 die Werthe die ihnen nach den vorigen Paragraphen gleich sind, so erhält man folgende Gleichungen:

$$x\,(y'z'' - z'y'') + y\,(z'x'' - x'z'') + z\,(x'y'' - y'x'')$$
$$x'\,(y''z - z''y) + y'\,(z''x - x''z) + z'\,(x''y - y''x)$$
$$x''\,(yz' - zy') + y''\,(zx' - xz') + z''\,(xy' - yx')$$
$$x\,(y'z'' - z'y'') + x'\,(y''z - z''y) + x''\,(yz' - zy')$$
$$y\,(z'x'' - x'z'') + y'\,(z''x - x''z) + y''\,(zx' - xz')$$
$$z\,(x'y'' - y'x'') + z'\,(x''y - y''x) + z''\,(xy' - yx').$$

Löset man in diesen sechs Gleichungen die Parenthesen auf und ordnet die positiven wie die negativen Glieder nach ihren Indices, so erhält man bei allen sechs Gleichungen den Ausdruck:

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'.$$

Diese Summe werde ich stets durch K bezeichnen, und wenn statt x, y, z die Größen ξ, η, ζ in dieser Form geordnet sind, so werde ich die Summe durch ein teutsches $\mathfrak{K}$ bezeichnen; also sind alle 6 oben angeführten Gleichungen = K und ebenso

$$\left.\begin{array}{l} \xi\mathfrak{X} + \eta\mathfrak{Y} + \zeta\mathfrak{Z} = \\ \xi'\mathfrak{X}' + \eta'\mathfrak{Y}' + \zeta'\mathfrak{Z}' = \\ \xi''\mathfrak{X}'' + \eta''\mathfrak{Y}'' + \zeta''\mathfrak{Z}'' = \\ \xi\mathfrak{X} + \xi'\mathfrak{X}' + \xi''\mathfrak{X}'' = \\ \eta\mathfrak{Y} + \eta'\mathfrak{Y}' + \eta''\mathfrak{Y}'' = \\ \zeta\mathfrak{Z} + \zeta'\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}'' = \end{array}\right\} \mathfrak{K}$$

Es fällt sogleich in die Augen, daß in jedem einzelnen Gliede die beiden Factoren correspondirende Größen sind und gleiche Indices haben; ebenso daß in jeder Gleichung die 3 Glieder entweder dieselben Buchstaben mit verschiedenen Indices, oder verschiedene Buchstaben mit demselben Index sind.

3) Sind hingegen die Buchstaben der 3 Glieder verschieden, die Indices aber zwar symmetrisch, aber in jedem einzelnen Gliede nicht bei beiden Factoren gleich, — oder sind die Buchstaben der 3 Glieder dieselben, aber die Indices verschieden, jedoch in jedem einzelnen Gliede bei gleichen Indices die Buchstaben verschieden, — so ist die Summe solcher 3 Glieder immer gleich 0. Man braucht es nur von einer Gleichung für jeden der 2 Fälle zu beweisen, so folgt es daraus für alle andere. Es wäre also zu zeigen, daß:

$$x'X'' + y'Y'' + z'Z'' = 0$$
$$yZ + y'Z' + y''Z'' = 0.$$

Man setze auch hier statt X'', Y'', Z'' die Werthe denen sie gleich sind, so erhält man folgende Gleichungen:

$$x'(yz' - zy') + y'(zx' - xz') + z'(xy' - yx')$$
$$y(x'y'' - y'x'') + y'(x''y - y''x) + y''(xy' - yx').$$

In der ersten Gleichung ist aber, wenn man die Paranthesen auflöset, das 1ste positive Glied gleich dem 3ten negativen, das 2te positive Glied gleich dem 1sten

negativen, das 3te positive Glied gleich dem 2ten negativen; also die ganze Summe $= 0$. In der zweiten Gleichung ist nach Auflösung der Paranthesen:

das 1ste positive Glied gleich dem 3ten negativen,
das 2te positive Glied gleich dem 1sten negativen,
das 3te positive Glied gleich dem 2ten negativen,

also die Summe der ganzen Gleichung $= 0$, also ist:

$x'X'' + y'Y'' + z'Z'' = 0$	$xZ + x'Z' + x''Z'' = 0$
$x''X + y''Y + z''Z = 0$	$xY + x'Y' + x''Y'' = 0$
$xX' + yY' + zZ' = 0$	$yX + y'X' + y''X'' = 0$
$yZ + y'Z' + y''Z'' = 0$	$x''X' + y''Y' + z''Z' = 0$
$zY + z'Y' + z''Y'' = 0$	$xX'' + yY'' + zZ'' = 0$
$zX + z'X' + z''X'' = 0$	$x'X + y'Y + z'Z = 0$

Dasselbe gilt natürlich für die griechischen Buchstaben ξ, η, ζ in Verbindung mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Anmerkung. Die beiden Sätze (Gaus theor. motus)

$$\text{Cos. } A \text{ Sin. } (B - C) + \text{Cos. } B \text{ Sin. } (C - A) + \text{Cos. } C \text{ Sin. } (A - B) = 0$$
$$\text{Sin. } A \text{ Sin. } (B - C) + \text{Sin. } B \text{ Sin. } (C - A) + \text{Sin. } C \text{ Sin. } (A - B) = 0$$

können aus diesem Satze hergeleitet werden, denn setzt man statt Cos. A, Cos. B, Cos. C, die Buchstaben a, b, c und statt der Sin. der drei Winkel A, B, C die Buchstaben a′, b′, c′ so ist

$$\text{Sin. } (B - C) = \text{Sin. } B \text{ Cos. } C - \text{Cos. } B \text{ Sin. } C = b'c - c'b, \text{ ebenso}$$
$$\text{Sin. } (C - A) = c'a - a'c$$
$$\text{Sin. } (A - B) = a'b - b'a, \text{ also ist}$$

$$\text{Cos. } A \text{ Sin. } (B - C) + \text{Cos. } B \text{ Sin. } (C - A) + \text{Cos. } C \text{ Sin. } (A - B) = a\,(b'c - c'b) + b\,(c'a - a'c) + c\,(a'b - b'a)$$

$$\text{Sin. } A \text{ Sin. } (B - C) + \text{Sin. } B \text{ Sin. } (C - A) + \text{Sin. } C \text{ Sin. } (A - B) = a'\,(b'c - c'b) + b'\,(c'a - a'c) + c'\,(a'b - b'a).$$

Beide Summen sind aber nach obigem Satze $= 0$.

4) $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\,(\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'')$ ist gleich $-(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')$.

Denn wenn man die Paranthesen auflöset, so erhält man folgende Größen:

$$\xi^2\xi'\xi'' + \xi^2\eta'\eta'' + \xi^2\zeta'\zeta'' + \eta^2\xi'\xi'' + \eta^2\eta'\eta'' + \eta^2\zeta'\zeta'' + \zeta^2\xi'\xi'' + \zeta^2\eta'\eta'' + \zeta^2\zeta'\zeta'' -$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$
$$\xi^2\xi'\xi'' - \xi\xi'\eta\eta'' - \xi\xi'\zeta\zeta'' - \xi\xi''\eta\eta' - \eta^2\eta'\eta'' - \eta\eta'\zeta\zeta'' - \xi\xi''\zeta\zeta' - \eta\eta''\zeta\zeta' - \zeta^2\zeta'\zeta''.$$
$$\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix}$$

Unter den 9 positiven Größen wird die 1ste durch die 10te, die 5te durch die 14te und die 9te durch die 18te aufgehoben, die übrigen werde ich symmetrisch ordnen, und an der darunter stehenden Zahl wird man sie sogleich aus den obigen 2 Reihen auffinden können.

$$(-\eta\eta'\zeta\zeta'' + \eta'\eta''\zeta^2 + \eta^2\zeta'\zeta'' - \eta\eta''\zeta\zeta') + (-\zeta\zeta'\xi\xi'' + \zeta'\zeta''\xi^2 + \zeta^2\xi'\xi'' - \zeta\zeta''\xi\xi') +$$
$$\begin{matrix} 15 & 8 & 6 & 17 & 16 & 3 & 7 & 12 \end{matrix}$$
$$(-\xi\xi'\eta\eta'' + \xi'\xi''\eta^2 + \xi^2\eta'\eta'' - \xi\xi''\eta\eta') = (\zeta''\eta - \eta''\zeta)(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (\xi''\zeta - \zeta''\xi)$$
$$\begin{matrix} 11 & 4 & 2 & 13 \end{matrix}$$

$(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (\eta''\xi - \xi''\eta)(\xi\eta' - \eta\xi')$. Von diesen 6 Paranthesen ist

die 1ste $= -\mathfrak{X}'$ die 3te $= -\mathfrak{Y}'$ die 5te $= -\mathfrak{Z}'$

die 2te $= \mathfrak{X}''$ die 4te $= \mathfrak{Y}''$ die 6te $= \mathfrak{Z}''$,

also kann man statt obiger Gleichung setzen:

$$-(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'').$$

5) $\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'' = (\zeta''\xi - \xi''\zeta)(\xi\eta' - \eta\xi') - (\xi''\eta - \eta''\xi)(\zeta\xi' - \xi\zeta') = \xi^2\eta'\zeta'' - \xi\xi''\eta'\zeta - \xi\xi'\eta\zeta'' + \xi'\xi''\eta\zeta - \xi\xi''\eta\zeta + \xi\xi'\eta''\zeta + \xi\xi''\eta\zeta' - \xi^2\eta''\zeta'$, von diesen Größen heben sich die 4te und 5te auf, in allen 6 übrigen Größen ist der Buchstabe ξ mit dem Index o enthalten, also ist obige Gleichung:

$$= \xi(\xi\eta'\zeta'' + \xi'\eta''\zeta + \xi''\eta\zeta' - \zeta\eta'\xi'' - \zeta'\eta''\xi - \zeta''\eta\xi') = \xi\mathfrak{K}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß:

$$\xi\mathfrak{K} = \mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'' - \mathfrak{Z}'\mathfrak{Y}'' \qquad \xi'\mathfrak{K} = \mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y} \qquad \xi''\mathfrak{K} = \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}'$$
$$\eta\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}'\mathfrak{X}'' - \mathfrak{X}'\mathfrak{Z}'' \qquad \eta'\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z} \qquad \eta''\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}'$$
$$\zeta\mathfrak{K} = \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{X}'' \qquad \zeta'\mathfrak{K} = \mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X} \qquad \zeta''\mathfrak{K} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}'.$$

6) $(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'') - (\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}')(\mathfrak{X}\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'')$

ist gleich $-\mathfrak{K}^2(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')$,

denn nach der dritten Gleichung in Nr. 4 läßt sich diese Reihe in folgende verwandeln:

$$-[(\mathfrak{Y}''\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}''\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}') + (\mathfrak{Z}''\mathfrak{X} - \mathfrak{X}''\mathfrak{Z})(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}\mathfrak{Z}') + (\mathfrak{X}''\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}''\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{X}')],$$

setzt man nun statt jeder dieser Parenthesen den Werth der ihr nach Nr. 5 zukommt, so erhält man:

$$-(\xi'\mathfrak{K}.\xi''\mathfrak{K} + \eta'\mathfrak{K}.\eta''\mathfrak{K} + \zeta'\mathfrak{K}.\zeta''\mathfrak{K}) = -\mathfrak{K}^2(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'').$$

Die Geometrie im Raume,

analytisch behandelt.

§. 1. Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so ist der Durchschnitt eine grade Linie, und diese Linie gehört beiden Ebenen gemeinschaftlich an. Werden diese beiden Ebenen noch von einer dritten geschnitten, so entstehen wieder zwei Durchschnittslinien, von denen jede dieser dritten Ebene und einer der beiden ersten Ebenen gemeinschaftlich angehört; diese 3 Durchschnittslinien können entweder parallel seyn (wenn die 3 Ebenen perpendikular auf einer vierten sind), dann haben die 3 Ebenen nichts Gemeinschaftliches; oder sie fallen in eine Linie zusammen, dann haben die 3 Ebenen diese Linie gemein; oder die 3 Linien schneiden sich in einem Punkte, dann haben die 3 Ebenen diesen Punkt gemein.

§. 2. Wenn die Entfernung eines Punktes von einer Ebene gegeben ist, so kann dieser Punkt in allen beliebigen Punkten zweier Ebenen liegen, die parallel mit der gegebenen, zu beiden Seiten um die gegebene Entfernung von ihr abstehen. — Ist die Entfernung desselben Punktes von einer zweiten Ebene, welche die erste schneidet, gegeben, so kann er wieder nur in zwei Ebenen liegen, die parallel mit der gegebenen, zu beiden Seiten um die gegebene Entfernung von ihr abstehen. — Daraus folgt, daß dieser Punkt nur in den Durchschnittslinien dieser zwei Ebenen mit den früheren zwei Ebenen, also in vier Linien, die parallel mit der Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen sind, liegen kann. — Weiß man nun noch die Entfernung desselben Punktes von einer dritten Ebene, die die beiden ersten

so schneidet, daß sie nur einen Punkt mit beiden gemein hat, so liegt der gesuchte Punkt abermals in zwei Ebenen, die parallel mit der gegebenen zu beiden Seiten um die gegebene Entfernung von ihr abstehen; da er aber auch in den eben erwähnten vier Parallellinien liegt, so kann es nur einer der 8 Durchschnittspunkte dieser zwei Ebenen mit den 4 Parallellinien seyn, da diese Ebenen keine andere Punkte mit den 4 Parallellinien gemein haben. — Findet man nun noch ein Mittel zu bestimmen, welcher der 8 Punkte es ist, so ist klar, daß die Lage jedes Punktes im Raume durch die Entfernung desselben von 3 angenommenen Ebenen, die nur einen Punkt gemein haben, bestimmt wird.

§. 3. Diese 8 Punkte correspondiren mit den 8 Ecken, die durch 3 sich in einem Punkte schneidende Ebenen gebildet werden. Nimmt man nun an, daß die Entfernung von jeder Ebene nur nach einer Richtung hin gemessen werden dürfe, woraus eine positive und eine negative Seite jeder Ebene entsteht; so würden in einer der 8 Ecken alle Entfernungen positiv, in der entgegengesetzten alle negativ, in drei Ecken zwei positiv und eine negativ, und in den 3 übrigen Ecken eine positiv und zwei negativ seyn. Und zwar würden die, in dieser Rücksicht, gleichen drei Ecken dadurch zu unterscheiden seyn, daß die eine negative oder die eine positive Entfernung in jeder der drei Ecken von einer andern Ebene gemessen wird. Dadurch also, daß man die Entfernung eines Punktes im Raume von den drei angenommenen Ebenen, Hauptebenen, durch ihre Positivität oder Negativität näher bezeichnet, kann der Ort jedes Punktes im Raume unzweideutig bestimmt werden.

§. 4. Zur größeren Bequemlichkeit nimmt man die drei Hauptebenen so an, daß jede senkrecht auf den beiden andern steht. Alsdann sind die drei Durchschnittslinien dieser Ebenen, die Axen, auch rechtwinklich untereinander, und jede ein Perpendikel auf eine Ebene, folglich parallel mit den Linien, welche die Entfernung des Punktes im Raume von den drei Hauptebenen bestimmen. Diese Entfernung eines Punktes von den drei Hauptebenen werden die Coordinaten des Punktes genannt. Eine solche constante Verbindung dreier Ebenen heißt ein Axensystem.

§. 5. Zur Bezeichnung der drei Coordinaten eines Punktes gebraucht man die Buchstaben x, y, z, und nennt jede der Axen nach den Coordinaten die mit ihr parallel sind, die Axe der x, die Axe der y und die Axe der z. Den Punkt, den alle drei Axen gemein haben, nennt man den Mittelpunkt des Axensystems oder den Anfangspunkt des Coordinaten, und bezeichnet ihn durch O; daher kann man

auch die Axen OX, OY und OZ bezeichnen. Jede Hauptebene bezeichnet man nach den in ihr liegenden Axen die Ebene YZ, auf welcher die Axe der x senkrecht steht, die Ebene ZX, auf welcher die Axe der y senkrecht steht, und die Ebene XY, auf welcher die Axe der z senkrecht steht. Jede dieser Ebenen hat vier Quadranten, die sich durch ihre Positivität und Negativität unterscheiden; ich werde diese Quadranten dadurch bezeichnen, daß ich das + oder — wie Exponenten den Buchstaben anhänge, um dadurch anzudeuten, welche Coordinaten in diesem Quadranten positiv oder negativ sind.

Die Quadranten der Ebene YZ sind $\overset{++}{YZ}, \overset{-+}{YZ}, \overset{--}{YZ}, \overset{+-}{YZ}$,
— — — — ZX sind $\overset{++}{ZX}, \overset{-+}{ZX}, \overset{--}{ZX}, \overset{+-}{ZX}$,
— — — — XY sind $\overset{++}{XY}, \overset{-+}{XY}, \overset{--}{XY}, \overset{+-}{XY}$.

Ebenso werde ich die acht körperlichen Ecken, in denen (nach §. 3.) ein Punkt liegen kann, durch solche Exponenten bezeichnen. Die 8 Ecken heißen also $\overset{+++}{XYZ}$, $\overset{-++}{XYZ}$, $\overset{+-+}{XYZ}$, $\overset{++-}{XYZ}$, $\overset{+--}{XYZ}$, $\overset{-+-}{XYZ}$, $\overset{--+}{XYZ}$ und $\overset{---}{XYZ}$.

§. 6. Die Richtung einer Linie kann mittelbar durch die Coordinaten zweier Punkte in ihr bestimmt werden.

§. 7. Nimmt man an, daß die Linie durch den Punkt O geht, so kann man ihre Richtung auch durch die Winkel bestimmen, die sie mit den drei Axen bildet; denn wenn einer dieser 3 Winkel bekannt ist, so muß die Linie in der Oberfläche eines Kegels liegen, der durch die Drehung des Winkels um die Axe entsteht; dann ist die Linie in 4 Ecken zu suchen, da der Kegel in 4 Ecken liegt. Ist ein zweiter Winkel bekannt, so liegt die Linie in einer zweiten Kegelfläche, die um die zweite Axe beschrieben ist; sie kann also nur eine der beiden Durchschnittslinien dieser 2 Kegel seyn, denn sonst haben die beiden Kegelflächen nichts gemein: diese zwei Durchschnittslinien liegen in zwei verschiedenen Ecken, also muß diese Zweideutigkeit durch den dritten Winkel noch gänzlich gehoben werden.

§. 8. Ein specieller Fall wäre, wenn zwei dieser Winkel sich zu 90° ergänzten; dann würden die beiden Kegel sich nicht schneiden, sondern nur in einer Linie berühren; dann müßte der dritte Winkel = 90° seyn.

§. 9. So wohl wie durch diese 3 Winkel kann die Richtung einer Linie auch als gegeben angesehen werden, wenn nur die Cosinus dieser Winkel gegeben sind. Diese Cosinus heißen Determinanten, und zu ihrer Bezeichnung gebraucht man die

Buchstaben ξ, η, ζ; wo ξ den Cosinus des Winkels bedeutet, den die Linie mit der Axe OX bildet, η den Cosinus des Winkels, den die Linie mit der Axe OY bildet, und ζ den Cosinus des Winkels, den die Linie mit der Axe OZ bildet.

§. 10. Aus dem in der Einleitung bestimmten Begriffe des Winkels folgt, daß alle Parallellinien, sie mögen durch den Mittelpunkt des Axensystems gehen oder nicht, einerlei Determinanten haben. Jede einzelne Linie muß also noch dadurch näher bezeichnet werden, daß ein Punkt in derselben durch seine Coordinaten gegeben wird.

§. 11. Die Richtung einer Linie kann aber auch noch auf folgende Weise bestimmt werden. Angenommen, sie gehe ebenfalls durch den Mittelpunkt des Axensystems, so braucht man nur ihren Neigungswinkel zu einer der Hauptebenen (z. B. XY), und den Winkel, welchen die Projection der Linie in dieser Ebene mit einer der anliegenden Axen bildet (z. B. mit der Axe OX), zu kennen, so ist die Richtung der Linie bestimmt; denn wenn man nur den letzten Winkel kennt, so ist die Linie nur in einer Ebene zu suchen, die mit der Axe OX diesen Winkel bildet und senkrecht auf XY steht, da nun aber auch der Winkel bekannt ist, den die gesuchte Linie mit der Durchschnittslinie dieser Ebene und der Ebene XY bildet (d. h. der Neigungswinkel der Linie zur Ebene XY), so ist auch die Linie selbst gegeben. Da aber der Winkel, den die Projection der Linie mit der Axe OX bildet, auf beide Seiten der Axe abgetragen werden kann und ebenso der Neigungswinkel auf beide Seiten der Ebene XY, so entstehen hier 4 mögliche Fälle; um diese Ungewißheit zu vermeiden, messe man den Winkel, den die Projection mit der Axe OX bildet, immer in der Richtung vom positiven OX zum positiven OY. Die Projection liegt entweder in den Quadranten $\overset{++}{XY}$ und $\overset{--}{XY}$, oder in $\overset{+-}{XY}$ und $\overset{-+}{XY}$; zählt man nun den Winkel immer in der oben angegebenen Richtung, so erhält man im ersten Falle einen spitzen, im zweiten Falle einen stumpfen Winkel, aber immer positiv. Ebenso messe man die Neigungswinkel der Linie zur Ebene XY immer von der Projection zum positiven OZ hin, so kann man ebenfalls einen spitzen oder stumpfen Winkel erhalten, aber die Richtung der Linie ist alsdann nicht mehr zweideutig, sondern sicher und bestimmt.

Liegt die gegebene Linie in den Ecken	so ist der Neigungswinkel zur Ebene XY:	der Winkel, den die Projection mit der Axe OX bildet:
$\overset{+++}{XYZ}$ und $\overset{---}{XYZ}$	kleiner als 90°	kleiner als 90°
$\overset{-++}{XYZ}$ — $\overset{+--}{XYZ}$	kleiner als 90°	größer als 90°
$\overset{+-+}{XYZ}$ — $\overset{-+-}{XYZ}$	größer als 90°	größer als 90°
$\overset{++-}{XYZ}$ — $\overset{--+}{XYZ}$	größer als 90°	kleiner als 90°.

§. 12. Da alle Parallellinien gleiche Richtung haben, so kann durch diese zwei Winkel nicht nur die Richtung einer Linie bestimmt werden, die durch den Mittelpunkt des Axensystems geht, sondern überhaupt die Richtung jeder Linie.

§. 13. Wenn die Richtung einer Linie nach §. 7. oder nach §. 11. bestimmt ist, so ist deßhalb noch nicht ihre Lage bestimmt; sondern um ihre Lage zu kennen, müssen noch die Coordinaten eines Punktes dieser Linie gegeben seyn.

§. 14. Die Lage einer Ebene im Raume kann durch die Coordinaten dreier Punkte dieser Ebene bestimmt werden; denn durch 3 Punkte kann nur eine Ebene gelegt werden.

§. 15. Ebenso kann die Lage einer Ebene durch die Coordinaten zweier Punkte dieser Ebene und durch die Richtung einer Linie in dieser Ebene bestimmt werden, nur muß diese Linie nicht parallel mit der Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte seyn, sonst wäre nicht bestimmt, welche von allen den Ebenen, die durch die zwei Punkte gelegt werden können, hier gemeint sey.

§. 16. Alle Ebenen die perpendikular auf einer gegebenen Linie oder auf einer Linie, die mit der gegebenen parallel ist, liegen, sind parallel, haben also dieselbe Richtung; also kann die Richtung einer Ebene durch die Richtung eines Perpendikels auf dieser Ebene gegeben werden. Die Determinanten dieses Perpendikels sind also auch die Determinanten der Ebene. Unter Determinanten einer Ebene hat man also immer die Determinanten eines Perpendikels auf dieser Ebene zu verstehen.

§. 17. Die Richtung einer Ebene kann auch durch ihren Neigungswinkel zu einer Hauptebene (XY), und durch den Winkel den die Durchschnittslinie der Ebene und dieser Hauptebene mit einer der anliegenden Axen (OX) macht, bestimmt werden. Hier entsteht dieselbe Vieldeutigkeit, wie in §. 11., indem, wenn der letzte Winkel

gegeben ist, zwei Durchschnittslinien möglich sind, die mit der Axe denselben Winkel bilden; durch jede dieser Durchschnittslinien können aber zwei Ebenen gelegt werden, die zur Hauptebene eine gleiche Neigung haben. Um diese Vieldeutigkeit zu vermeiden, messe man den Winkel, den die Durchschnittslinie mit der Axe der x macht, wie in §. 11. vom positiven OX nach dem positiven OY hin. Um den Neigungswinkel zu messen muß man aus einem Punkte der Durchschnittslinie, sowohl in der gegebenen Ebene als in der Hauptebene XY, Perpendikel auf der Durchschnittslinie errichten; das erste ziehe man immer auf die positive Seite der Ebene XY, das zweite auf diejenige Seite der Durchschnittslinie, daß es mit der Axe OX (immer in derselben Richtung gezählt) einen Winkel bildet, welcher um 90° größer ist als der den die Durchschnittslinie bildet, nie aber um 90° kleiner. Alsdann kann der Neigungswinkel durch diese beiden Perpendikel gemessen werden, er kann spitz oder stumpf seyn, aber jedesmal bestimmt er unzweideutig die Richtung der Ebene. Combinirt man diese Regel mit der die in §. 11. für den Neigungswinkel einer Linie und den Winkel, den ihre Projection mit der Axe OX bildet, gegeben ist; so folgt daraus folgendes Schema für die Relation des Neigungswinkels der Ebene und des Winkels, den die Durchschnittslinie mit der Axe OX bildet, zu dem Neigungswinkel des Perpendikels auf dieser Ebene und dem Winkel, den die Projection des Perpendikels mit der Axe OX bildet. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Ebene zur Hauptebene XY durch ω und den Winkel den die Durchschnittslinie mit der Axe OX bildet durch φ, so ist:

wenn φ	und ω	so liegt das Perpendikel auf dieser Ebene in den Ecken:	also ist sein Neigungswinkel zur Ebene XY:	und der Winkel den seine Projection mit der Axe OY bildet
spitz	spitz	$\overset{+-+}{XYZ}$ und $\overset{-+-}{XYZ}$	$\omega + 90°$	$\varphi + 90°$
spitz	stumpf	$\overset{-++}{XYZ}$ — $\overset{+--}{XYZ}$	$\omega - 90°$	$\varphi + 90°$
stumpf	stumpf	$\overset{++-}{XYZ}$ — $\overset{--+}{XYZ}$	$270° - \omega$	$\varphi - 90°$
stumpf	spitz	$\overset{+++}{XYZ}$ — $\overset{---}{XYZ}$	$90° - \omega$	$\varphi - 90°$.

§. 18. Wenn durch das Centrum eines Axensystems ein neues rechtwinkliges Axensystem gelegt wird, so kann dieses durch die Determinanten der neuen Axen in Bezug auf die früheren bestimmt werden, und es ist willkührlich, welche Seite der neuen Axen als positiv und welche als negativ angesehen wird.

§. 19. Die Lage eines neuen Axensystems kann aber auch bestimmt werden, wenn man die neue Ebene XY nach §. 17. bestimmt, und den Winkel, den die eine der neuen Axen, welche in dieser Ebene liegen, mit der Durchschnittslinie bildet, hinzufügt. Die Lage der Ebene XY des neuen Axensystems ist alsdann unzweideutig bestimmt, wie in §. 17. gezeigt ist, also braucht man nur festzusetzen, welche die positive und welche die negative Seite dieser Ebene seyn soll, so ist die neue Axe OZ auch bestimmt; als negative werde hier die Seite der neuen Ebene angenommen, auf welcher der Neigungswinkel zur früheren Ebene XY gemessen wird, so daß also die positive Axe OZ diesem Winkel gegenüber steht. Wenn man von der Durchschnittslinie der beiden Ebenen XY in der neuen Ebene (auf der positiven Seite der alten Ebene) fortgeht, so sey die erste neue Axe, auf die man stößt, die neue positive Axe OX, und in derselben Richtung 90° weiter gegangen, so trifft man auf die neue positive Axe OY. Der Winkel den die neue Axe OX mit der Durchschnittslinie macht, muß also immer ein spitzer (oder 0°) seyn. Bezeichnet man wie in §. 17. den Neigungswinkel mit ω und den Winkel, den die Durchschnittslinie mit der alten Axe OX macht, mit φ, so findet folgende Lage der neuen positiven Axen statt:

ist φ spitz	und ω spitz	so liegt die neue Axe OX in der Ecke $\overset{+++}{XYZ}$ oder $\overset{-++}{XYZ}$	und die neue Axe OY in der Ecke $\overset{-++}{XYZ}$ oder $\overset{--+}{XYZ}$	u. d. neue Axe OZ in d. Ecke $\overset{+-+}{XYZ}$
ist φ spitz	und ω stumpf	$\overset{+++}{XYZ}$ — $\overset{+-+}{XYZ}$	$\overset{+-+}{XYZ}$ — $\overset{--+}{XYZ}$	$\overset{-++}{XYZ}$
ist φ stumpf	und ω stumpf	$\overset{-++}{XYZ}$ — $\overset{+++}{XYZ}$	$\overset{+++}{XYZ}$ — $\overset{+-+}{XYZ}$	$\overset{--+}{XYZ}$
ist φ stumpf	und ω spitz	$\overset{-++}{XYZ}$ — $\overset{--+}{XYZ}$	$\overset{--+}{XYZ}$ — $\overset{+-+}{XYZ}$	$\overset{+++}{XYZ}$.

§. 20. Wenn das neue Axensystem nicht durch den Mittelpunkt des alten geht, so müssen, außer den Bestimmungen von §. 18. oder §. 19., noch die Coordinaten des neuen Mittelpunktes in Bezug auf das alte Axensystem, oder die Coordinaten des alten Mittelpunktes in Bezug auf das neue Axensystem, gegeben werden, um die Lage des neuen Axensystems zu bestimmen.

§. 21. Jede Gleichung zwischen 3 veränderlichen Größen, kann als die Gleichung einer Fläche angesehen werden, wo denn die 3 veränderlichen Größen die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Fläche sind. So hat jede Fläche ihre eigene Gleichung. Zwei Gleichungen mit einander verbunden geben die Gleichung

einer Linie (Curve im Allgemeinen), denn jede einzelne Gleichung gilt für eine Fläche; also kann die Verbindung beider nur die Gleichung der Durchschnittslinie seyn, da beide Flächen nichts andres mit einander gemein haben. Wenn bei einer beliebigen Gleichung, die also für eine Fläche gilt, die Bedingung gemacht wird, daß die Coordinate x constant seyn soll, so ist dieses die Gleichung für eine ebene Curve, da diese Bedingung die 2te Gleichung $x = a$ enthält, und diese Gleichung giebt eine Ebene, die parallel mit YZ ist. Zur Bestimmung der Natur einer Linie gehören also immer 2 Gleichungen.

Fügt man noch eine 3te Gleichung hinzu, so bestimmen alle 3 zusammen einen oder einige constante Punkte, da die 3 Größen nun nicht mehr als veränderlich betrachtet werden können, sondern durch die 3 Gleichungen bestimmt sind (wenn nicht 2 dieser Gleichungen identisch sind), oder weil 2 dieser Gleichungen schon eine Linie bestimmen, die dritte eine Fläche; die Verbindung aller 3 bestimmt also die Durchschnittspunkte der Linie mit dieser Fläche.

§. 22. **Aufgabe.** Aus den Coordinaten zweier Punkte P und P′ die Länge der Linie PP′ zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des Punktes P sollen durch x, y, z, und die des Punktes P′ durch x′, y′, z′ bezeichnet seyn. Man denke sich durch den Punkt P eine Parallellinie mit der Axe OX gelegt, und von P′ ein Perpendikel auf diese Linie gefällt, den Treffpunkt bezeichne man durch Q. Von P′ ist aber auch ein Perpendikel auf die Ebene XY gefällt, welches die Coordinate z′ ist; auf dieses z′ fälle man von Q ein Perpendikel und bezeichne den Treffpunkt durch S, so ist QS parallel der Axe OY, also:

$$PQ = x' - x$$
$$QS = y' - y$$
$$SP' = z' - z.$$

Da nun in dem Dreiecke P′QS, $P'Q^2 = QS^2 + SP'^2$, in dem Dreiecke P′QP aber $P'P^2 = PQ^2 + P'Q^2$ ist, so ist

$$P'P^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2, \text{ also:}$$
$$P'P = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Anmerkung. Hier ist offenbar angenommen, daß die Coordinaten x′, y′, z′ größer wären als x, y, z; im umgekehrten Falle wäre $PQ = x - x'$ rc.; da aber

in der Endformel nur die Quadrate dieser Größen vorkommen, so ist der Werth des Ausdruckes in beiden Fällen derselbe.

§. 23. Zusatz. Wenn man die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind, vom Mittelpunkte des Axensystems finden will, so nehme man diesen Punkt als P′ und den Mittelpunkt als P in §. 22. an, die Coordinaten des letzteren sind alle 3 = 0, also erhält man:

$$OP' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

§. 24. Aufgabe. Die Coordinaten der Punkte P und P′ sind gegeben; man soll die Determinanten der Linie P′P finden.

Auflösung. Behält man die Hülfslinien des §. 22. bei,

so ist PQ || OX

QS || OY

SP′ || OZ. Legt man nun durch P eine Linie PQ′ parallel und gleich QS, so ist P′Q′ perpendikular auf PQ′.

$$\xi = \cos. P'PQ = \frac{PQ}{PP'} = \frac{x' - x}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}$$

$$\eta = \cos. P'PQ' = \frac{PQ'}{PP'} = \frac{y' - y}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}$$

$$\zeta = \cos. PP'S = \frac{P'S}{PP'} = \frac{z' - z}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' + z)^2}}.$$

Anmerkung. Wenn einer der beiden Punkte der Anfangspunkt der Coordinaten ist, oder wenn die Linie überhaupt durch den Anfangspunkt geht, so fällt aus dieser Formel x′, y′, z′ heraus, weil sie gleich 0 sind; man erhält also die Formeln:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Und wenn man für einen bestimmten Fall die Entfernung des Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind, vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich 1 setzen kann, so ist $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$, also für diesen Fall

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z.$$

§. 25. Da in obigen 3 Formeln für die Determinanten das Quadrat des Nenners gleich der Summe der Quadrate der Zähler ist, so folgt, daß im Allgemeinen **die Summe der Quadrate der Determinanten einer Linie gleich 1 ist.**

§. 26. Die Gleichungen §. 24. kann man verändern in

$$x - a = \xi r, \; y - b = \eta r, \; z - c = \zeta r,$$

wo statt x, y, z die Größen a, b, c gesetzt sind und r die Länge der Linie PP′ bedeutet. Daher ist

$$r = \frac{z - c}{\zeta},$$

also erhält man hieraus für die grade Linie 2 Gleichungen von der Form

$$x = \frac{\xi}{\zeta}(z - c) + a$$

$$y = \frac{\eta}{\zeta}(z - c) + b.$$

Sieht man hier a, b, c als constant an, so gelten diese Gleichungen für alle graden Linien die durch diesen constanten Punkt gezogen werden können.

§. 27. Nach der Construction von §. 22. ist PS gleich der Projection der Linie PP′ in der Ebene XY; nun ist aber $PS^2 = PQ^2 + QS^2$, also

$$PS = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

ebenso erhielte man für die Projection in der Ebene YZ die Formel $\sqrt{(y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ und für die Projection in der Ebene ZX die Formel $\sqrt{(z' - z)^2 + (x' - x)^2}$.

Bezeichnet man die Linie selbst durch l, und ihre Projectionen in den verschiedenen Ebenen durch $\overset{X}{P}$, $\overset{Y}{P}$ und $\overset{Z}{P}$, so kann man obige Formeln auch ausdrücken durch:

$$\overset{X}{P} = l\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$$

$$\overset{Y}{P} = l\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}$$

$$\overset{Z}{P} = l\sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

§. 28. **Aufgabe.** Aus den Determinanten einer Linie die Determinanten ihrer Projectionen in den Hauptebenen zu finden.

Auflösung. Nach der Construction des §. 22. ist

$$\xi = \frac{PQ}{PP'}$$

cos. SPQ ist aber die correspondirende Determinante der Projection in der Ebene XY; nun ist aber cos. SPQ $= \frac{PQ}{PS}$ also $= \xi \cdot \frac{PP'}{PS}$, nun ist aber (§. 27.) PS $=$ PP'$\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ also cos. SPQ $= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$.

Auf demselben Wege findet man, daß die Determinanten

von $\overset{X}{P}$ sind $\xi' = 0 \qquad \eta' = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$

von $\overset{Y}{P}$ sind $\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}} \qquad \eta' = 0 \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}}$

von $\overset{Z}{P}$ sind $\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \qquad \eta' = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \qquad \zeta' = 0.$

§. 29. Die Linie PQ (§. 22.) ist gleich der Projection der Linie PP' auf die Axe der x, also ist diese Projection gleich $x' - x = l\xi$, ebenso sind die Projectionen der Linie l auf die beiden andern Axen:

$$\text{auf } OY = y' - y = l\eta$$
$$\text{auf } OZ = z' - z = l\zeta.$$

Sie verhalten sich also wie die Determinanten.

§. 30. Aufgabe. Wenn die Coordinaten zweier Punkte einer Linie gegeben sind; die Coordinaten eines beliebigen dritten Punktes dieser Linie zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte A und A' bezeichne man durch a, b, c und durch a', b', c'; die des gesuchten Punktes B durch x, y, z, so ist AA' $= \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$, diese Größe bezeichne man der Kürze wegen durch m, BA $= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, diese Größe bezeichne man durch n, so ist

$$\xi = \frac{a' - a}{m} = \frac{x - a}{n}$$

$$\eta = \frac{b' - b}{m} = \frac{y - b}{n}$$

$$\zeta = \frac{c' - c}{m} = \frac{z - c}{n}.$$

Bezeichnet man nun $\frac{n}{m}$ oder das Verhältniß von $BA : AA'$ durch λ, so ist $x - a = \lambda\,(a' - a)$, also

$$x = \lambda\,(a' - a) + a,$$
$$\text{ebenso } y = \lambda\,(b' - b) + b$$
$$z = \lambda\,(c' - c) + c.$$

Hier kann λ eine positive oder negative Zahl seyn, jenachdem B auf derselben Seite von A liegt, als A' oder auf der entgegengesetzten; denn von A ist die Richtung nach A' positiv angenommen, liegt also A zwischen B und A', so wird λ negativ seyn. Ebenso kann es kleiner oder größer als 1 seyn, jenachdem AB kleiner oder größer als AA' ist.

§. 31. Zusatz. Setzt man in diesen Formeln $x = o$, so erhält man für y und z die Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunktes der gegebenen Linie mit der Ebene YZ.

Ist nun $o = \lambda\,(a' - a) + a$, so ist $\lambda = \frac{a}{a - a'}$, also sind die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gegebenen Linie

mit der Ebene YZ, $x = o \quad y = \frac{a\,(b' - b)}{a - a'} + b \quad z = \frac{a\,(c' - c)}{a - a'} + c$

— — ZX, $x = \frac{b\,(a' - a)}{b - b'} + a \quad y = o \quad z = \frac{b\,(c' - c)}{b - b'} + c$

— — XY, $x = \frac{c\,(a' - a)}{c - c'} + a \quad y = \frac{c\,(b' - b)}{c - c'} + b \quad z = o.$

Da die Formeln für die 3 Determinanten durch die Coordinaten zweier Punkte ausgedrückt alle einen gemeinschaftlichen Nenner haben (§. 24.), so kann man diese 9 Gleichungen kürzer ausdrücken. Es sind nehmlich die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linie

mit der Ebene YZ, $x = o \quad y = b - a\frac{\eta}{\xi} \quad z = c - a\frac{\zeta}{\xi}$

— — ZX, $x = a - b\frac{\xi}{\eta} \quad y = o \quad z = c - b\frac{\zeta}{\eta}$

— — XY, $x = a - c\frac{\xi}{\zeta} \quad y = b - c\frac{\eta}{\zeta} \quad z = o.$

§. 32. Aufgabe. Die Richtung einer Linie sey (nach §. 11.) durch den

Neigungswinkel β zur Ebene XY und durch den Winkel λ, den ihre Projection in dieser Ebene mit der Axe OX macht, bestimmt; man soll ihre Determinanten finden.

Auflösung. Da hier nur von der Richtung der Linie, nicht von ihrer Lage die Rede ist, so nehme man zur größeren Bequemlichkeit an, daß die Linie durch den Mittelpunkt O gehe, und von einem beliebigen Punkte P in der Linie fälle man ein Perpendikel PX′ auf die Axe der x, PY′ auf die Axe der y und PP′ auf die Ebene XY, oder, was dasselbe ist, auf die Projection in dieser Ebene. Betrachten wir erst den Fall, wo λ und β beide kleiner als 90° sind; die 3 andern Fälle (§. 11.) sollen nachher untersucht werden.

$$\xi = \cos. POX'$$

$$\eta = \cos. POY'$$

$$\zeta = \cos. OPP' = \sin. POP'.$$

POP′ ist aber der Winkel β und P′OX′ der Winkel λ, also $OP' = OP \cos. \beta$, $OX' = OP' \cos. \lambda = OP \cos. \beta \cos. \lambda$, aber $OX' = OP \cos. POX' = OP \,.\, \xi$, folglich:

$$\xi = \cos. \beta \cos. \lambda.$$

$OY' = OP' \cos. P'OY' = OP' \sin. \lambda = OP \cos. \beta \sin. \lambda$, aber auch $OY' = OP \cos. POY' = OP \,.\, \eta$, folglich:

$$\eta = \cos. \beta \sin. \lambda$$

$$\zeta = \sin. \beta.$$

Im zweiten Falle, wenn $\lambda > 90°$ und $\beta < 90°$ ist, so liegt die Linie in der Ecke $\overset{-++}{XYZ}$, also wird diese positive Seite der Linie (wenn man die in $\overset{+--}{XYZ}$ liegende Verlängerung als negativ ansieht) mit OX einen stumpfen, mit OY und OZ aber spitze Winkel bilden, also wird ξ negativ, η und ζ aber positiv seyn müssen; da aber λ stumpf ist, so wird auch $\cos. \lambda$ negativ, $\sin. \lambda$ positiv seyn; also wird die Formel für diesen Fall dieselbe bleiben können, denn ξ wird dadurch negativ, η und ζ aber bleiben positiv.

Im dritten Falle, wenn beide Winkel stumpf sind, liegt die Linie in der Ecke $\overset{+-+}{XYZ}$, also wird sie mit OY einen stumpfen, mit OZ und OX aber spitze Winkel bilden; η muß also negativ, ζ und ξ positiv seyn. Nun ist aber $\cos. \lambda$ und $\cos. \beta$ negativ, $\sin. \lambda$ aber positiv, also auch hier wird die Formel dieselbe bleiben müssen, da η negative, ζ und ξ aber positive Werthe dadurch erhalten.

Im vierten Falle, wenn λ spitz β aber stumpf ist, liegt die Linie in der Ecke $\overset{--+}{XYZ}$, also muß ξ und η negativ und ζ positiv seyn. Da aber cos. β negativ und die andern Größen alle positiv sind, so bleibt auch hier die Formel dieselbe, indem sie ξ und η einen negativen, ζ einen positiven Werth giebt.

§. 33. Aufgabe. Wenn die Determinanten zweier Linien gegeben sind, den Cosinus des Winkels zu finden, den diese beiden Linien bilden.

Auflösung. Man nehme an, daß beide Linien durch den Mittelpunkt des Axensystems gehen (wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehen, so ziehe man Parallellinien mit den gegebenen durch den Mittelpunkt, welche denselben Winkel bilden werden). Von beiden Linien schneide man ein Stück ab, welches gleich 1 ist, und bezeichne die Durchschnittspunkte mit P und P', so ist also OP = OP' = 1. Die Coordinaten dieser Punkte sind (§. 24. Anm.) die Determinanten der Linien, also ist die Verbindungslinie $PP' = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$.

In einem Dreiecke a, b, c ist aber $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos. A$*); setzt man nun $a = PP' = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$

$b = OP = 1$

$c = OP' = 1$

$A = \omega$, oder dem Winkel, welchen die beiden gegebenen Linien bilden;

so ist: $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = 2 - 2\cos.\omega$, da aber (§. 25.)

$$1 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\ \text{ebenso}\ 1 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

so setze man statt 2 die Summe dieser 6 Quadrate:

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \xi^2 + \xi'^2 + \eta^2 + \eta'^2 + \zeta^2 + \zeta'^2 - 2\cos.\omega$$

$$\text{oder} - 2\xi'\xi - 2\eta'\eta - 2\zeta'\zeta = -2\cos.\omega,\ \text{also}$$

$$\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta = \cos.\omega.$$

§. 34. Da $\sin.^2\omega = 1 - \cos.^2\omega$ ist, so setze man:

$$1 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2),\ \text{also}$$

$$\sin.^2\omega = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi'\xi + \eta'\eta + \zeta'\zeta)^2.$$

---

*) Man braucht diesen Satz nicht aus der Trigonometrie zu entlehnen, sondern nur den Cosinus, multiplicirt mit der anliegenden Seite, statt des einen Stückes der Seite im 13ten Satze des 2ten Buches von Euklids Elementen, zu setzen.

Wenn man diese Parenthesen auflöst, so erhält man 15 Glieder. Um sie leichter übersehen zu können, sind die zum 1sten Theile gehörigen vor, die zum 2ten Theile gehörigen hinter den Strich gesetzt worden.

$$\sin.^2 \omega = \left\{ \begin{array}{r|l} \xi'^2\xi^2 + \eta'^2\eta^2 + \zeta'^2\zeta^2 & -\xi'^2\xi^2 - \eta'^2\eta^2 - \zeta'^2\zeta^2 \\ +\eta^2\zeta'^2 + \zeta^2\eta'^2 & -\;2\,\eta\eta'\zeta\zeta' \\ +\zeta^2\xi'^2 + \xi^2\zeta'^2 & -\;2\,\zeta\zeta'\xi\xi' \\ +\xi^2\eta'^2 + \eta^2\xi'^2 & -\;2\,\xi\xi'\eta\eta'. \end{array} \right.$$

Hier heben sich die beiden ersten Reihen, und die andern geben zusammen jedesmal ein Quadrat; also ist:

$$\sin.^2 \omega = (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2$$

$$\sin. \omega = \sqrt{(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2}.$$

§. 35. Wenn die beiden Linien einen rechten Winkel bilden, also $\omega = 90^\circ$ ist, so ist auch

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

$$(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2 = 1.$$

§. 36. Wenn die Richtung zweier Linien nach §. 11. bestimmt ist, so sind ihre Determinanten (§. 32.):

$$\begin{array}{ll} \xi = \cos.\beta\cos.\lambda & \xi' = \cos.\beta'\cos.\lambda' \\ \eta = \cos.\beta\sin.\lambda & \eta' = \cos.\beta'\sin.\lambda' \\ \zeta = \sin.\beta & \zeta' = \sin.\beta', \end{array}$$

also $\cos.\omega = \cos.\beta\cos.\beta'\cos.\lambda\cos.\lambda' + \cos.\beta\cos.\beta'\sin.\lambda\sin.\lambda' + \sin.\beta\sin.\beta'$

$$\cos.\omega = \cos.\beta\cos.\beta'(\cos.\lambda\cos.\lambda' + \sin.\lambda\sin.\lambda') + \sin.\beta\sin.\beta'$$

$$\cos.\omega = \cos.\beta\cos.\beta'\cos.(\lambda - \lambda') + \sin.\beta\sin.\beta'.$$

Nimmt man nun um den Anfangspunkt der Coordinaten eine Kugel an, deren Radius = 1, und nennt die Punkte in denen die Axen diese Kugelfläche schneiden x, y, z, und die Punkte in welchen die beiden gegebenen Linien (wenn sie durch den Mittelpunkt gehen) die Kugelfläche schneiden a und a′, so ist der Bogen

$$az = 90^\circ - \beta$$

$$a'z = 90^\circ - \beta',$$

der sphärische Winkel $aza'' = \lambda - \lambda'$

$$aa' = \omega.$$

Bezeichnet man nun in diesem sphärischen Dreiecke aza″

die Seite aa′ durch a

a′z — b

az — c,

den Winkel aza′ — A, so ist, wenn man diese Bezeichnung auf obige Formel anwendet:

$$\cos. a = \sin. b \sin. c \cos. A + \cos. b \cos. c,$$

welches die erste Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie ist.

§. 37. Aufgabe. Aus den Determinanten zweier Linien die Projectionen des Winkels zu finden, welchen diese Linien bilden.

Auflösung. Nach §. 28. sind die Determinanten der Projectionen der beiden Linien in der Ebene YZ

$$0, \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}, \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}} \quad \text{und} \quad 0, \frac{\eta'}{\sqrt{\eta'^2+\zeta'^2}}, \frac{\zeta'}{\sqrt{\eta'^2+\zeta'^2}}.$$

Nach §. 33. ist also der Cosinus des projicirten Winkels

$$\text{in der Ebene YZ} = \frac{\eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)(\eta'^2+\zeta'^2)}}$$

$$\text{ebenso in der Ebene ZX} = \frac{\zeta\zeta' + \xi\xi'}{\sqrt{(\zeta^2+\xi^2)(\zeta'^2+\xi'^2)}}$$

$$\text{— — — XY} = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)}}$$

Nach §. 34. ist der Sinus des projicirten Winkels

$$\text{in der Ebene YZ} = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)(\eta'^2+\zeta'^2)}}$$

$$\text{— — ZX} = \frac{\zeta\xi' - \xi\zeta'}{\sqrt{(\zeta^2+\xi^2)(\zeta'^2+\xi'^2)}}$$

$$\text{— — XY} = \frac{\xi\eta' - \eta\xi'}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)}}$$

§. 38. Aufgabe. Eine Linie ist gegeben durch ihre Determinanten (ξ, η, ζ) und die Coordinaten eines Punktes p in der Linie (a, b, c); außer dieser Linie ist ein Punkt p′ durch seine Coordinaten a′, b′, c′ gegeben; man soll den Abstand

dieses Punktes von der Linie (l), die Coordinaten des Punktes, in welchem ein Perpendikel vom Punkte p′ auf die Linie, dieselbe trifft (x, y, z), die Determinanten des Perpendikels (ξ', η', ζ') und den Abstand des Punktes p vom Treffpunkte (l′) finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Linie pp′ durch l″ und ihre Determinanten durch ξ'', η'', ζ'', den Winkel den l″ mit der gegebenen Linie macht durch ω, so ist:

$$l'' = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}$$

$$\xi'' = \frac{a'-a}{l''} \qquad \eta'' = \frac{b'-b}{l''} \qquad \zeta'' = \frac{c'-c}{l''}$$

$$\cos.\,\omega = \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = \frac{\xi(a'-a) + \eta(b'-b) + \zeta(c'-c)}{l''}.$$

Nun ist aber $l' = l'' \cos.\,\omega$, also

$$l' = \xi\,(a'-a) + \eta\,(b'-b) + \zeta\,(c'-c).$$

Es ist aber auch $\xi = \frac{x-a}{l'} \qquad \eta = \frac{y-b}{l'} \qquad \zeta = \frac{z-c}{l'}$

also $x = a + \xi l' \qquad y = b + \eta l' \qquad z = c + \zeta l'$

oder $x = a + \xi\,[\,\xi(a'-a) + \eta(b'-b) + \zeta(c'-c)\,]$

$y = b + \eta\,[\,\xi(a'-a) + \eta(b'-b) + \zeta(c'-c)\,]$

$z = c + \zeta\,[\,\xi(a'-a) + \eta(b'-b) + \zeta(c'-c)\,]$

$l^2 = l''^2 - l'^2$, also $l = \sqrt{l''^2 - l'^2}$. *)

Da man nun l als eine bekannte Größe ansehen kann, sind die Determinanten des Perpendikels nach §. 24.

$$\xi' = \frac{x-a'}{l} \qquad \eta' = \frac{y-b'}{l} \qquad \zeta' = \frac{z-c'}{l}.$$

Setzt man in diesen Formeln für x, y, z und l die gefundenen Werthe, so ist

$$\xi = \frac{a - a' + \xi\,[\,\xi(a'-a) + \eta(b'-b) + \zeta(c'-c)\,]}{\sqrt{[(b'-b)\zeta-(c'-c)\eta]^2 + [(c'-c)\xi-(a'-a)\zeta]^2 + [(a'-a)\eta-(b'-b)\xi]^2}} \text{ ꝛc.}$$

---

*) Wenn man diese Gleichung auflösen wollte, würde sie einen sehr verwickelten Ausdruck geben, man setze also: $l = l''\sin.\,\omega$. Es ist aber $\sin.\,\omega = \sqrt{(\eta''\zeta-\zeta''\eta)^2 + (\zeta''\xi-\xi''\zeta)^2 + (\xi''\eta-\eta''\xi)^2}$,

also $\sin.\,\omega = \sqrt{\frac{[(b'-b)\zeta-(c'-c)\eta]^2 + [(c'-c)\xi-(a'-a)\zeta]^2 + [(a'-a)\eta-(b'-b)\xi]^2}{l''^2}}$

folglich $l = \sqrt{[(b'-b)\zeta-(c'-c)\eta]^2 + [(c'-c)\xi-(a'-a)\zeta]^2 + [(a'-a)\eta-(b'-b)\xi]^2}$.

§. 39. Wenn also eine Linie durch die Coordinaten ihrer Endpunkte a, b, c und a′, b′, c′ gegeben ist, und die Richtung einer anderen durch ihre Determinanten ξ, η, ζ, so läßt sich die Projection der ersten auf die zweite finden, indem man in der zweiten einen Punkt x, y, z annimmt; die Entfernung des angenommenen Punktes von der Projection des Punktes a, b, c ist dann $\xi(x-a)+\eta(y-b)+\zeta(z-c)$, ebenso ist die Entfernung des angenommenen Punktes von der Projection des anderen Endpunktes der Linie gleich $\xi(x-a')+\eta(y-b')+\zeta(z-c')$, also der Unterschied beider oder die Projection der ersten Linie auf die zweite (oder jede andere die mit der zweiten parallel ist)

$$\xi(a'-a)+\eta(b'-b)+\zeta(c'-c).$$

§. 40. Aufgabe. Gegeben sind die Coordinaten zweier Punkte P und P″, und die Determinanten zweier Linien, welche durch diese Punkte gehen; man soll die Determinanten ihres gemeinschaftlichen Perpendikels, die Länge desselben und die Coordinaten der Treffpunkte finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes P durch a, b, c, die Determinanten der Linie, welche durch P geht, durch ξ, η, ζ, die Coordinaten des Treffpunkts in dieser Linie durch x, y, z und das zwischen diesem Treffpunkte und P liegende Stück der Linie durch p, die Länge des Perpendikels durch p′, seine Determinanten durch ξ', η', ζ', die Coordinaten des Punktes P″ durch a″, b″, c″, die Determinanten der Linie, welche durch P″ geht, durch ξ'', η'', ζ'', die Coordinaten des Treffpunktes in dieser Linie durch x″, y″, z″ und das zwischen diesem Treffpunkte und P″ liegende Stück der Linie durch p″; so ist (§. 24.):

$$\begin{array}{lll} a''-x''=p''\xi'' & x''-x=p'\xi' & x-a=p\xi \;*) \\ b''-y''=p''\eta'' & y''-y=p'\eta' & y-b=p\eta \\ c''-z''=p''\zeta'' & z''-z=p'\zeta' & z-c=p\zeta. \end{array}$$

Addirt man von diesen 9 Gleichungen immer die zusammen, welche in einer Reihe neben einander stehen, so erhält man:

$$\begin{aligned} a''-a&=p''\xi''+p'\xi'+p\xi \\ b''-b&=p''\eta''+p'\eta'+p\eta \\ c''-c&=p''\zeta''+p'\zeta'+p\zeta. \end{aligned}$$

---

*) Hier erfordert die Symmetrie, daß die Buchstaben cyklisch geordnet werden; d. h. wenn man mit a″ anfängt, muß x″ folgen, dann x und zuletzt a.

Diese 3 Gleichungen multiplicire man, die erste mit $\mathfrak{X}''$, die zweite mit $\mathfrak{Y}''$, die dritte mit $\mathfrak{Z}''$ *), so ist

$$\mathfrak{X}''(a''-a) = p''\xi''\mathfrak{X}'' + p'\xi'\mathfrak{X}'' + p\xi\mathfrak{X}''$$
$$\mathfrak{Y}''(b''-b) = p''\eta''\mathfrak{Y}'' + p'\eta'\mathfrak{Y}'' + p\eta\mathfrak{Y}''$$
$$\mathfrak{Z}''(c''-c) = p''\zeta''\mathfrak{Z}'' + p'\zeta'\mathfrak{Z}'' + p\zeta\mathfrak{Z}''.$$

Addirt man diese 3 Gleichungen, so ist (Einl. alg. Vork. No. 2 und 3):

$$\mathfrak{X}''(a''-a) + \mathfrak{Y}''(b''-b) + \mathfrak{Z}''(c''-c) = p''\mathfrak{K}, \text{ also:}$$
$$p'' = \frac{1}{\mathfrak{K}}[\mathfrak{X}''(a''-a) + \mathfrak{Y}''(b''-b) + \mathfrak{Z}''(c''-c)],$$

eben so erhält man, wenn man statt mit $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ zu multipliciren, mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ und zum dritten Male mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ multiplicirt,

$$p' = \frac{1}{\mathfrak{K}}[\mathfrak{X}'(a''-a) + \mathfrak{Y}'(b''-b) + \mathfrak{Z}'(c''-c)]$$
$$p = \frac{1}{\mathfrak{K}}[\mathfrak{X}(a''-a) + \mathfrak{Y}(b''-b) + \mathfrak{Z}(c''-c)].$$

Da aber p' auf beiden Linien perpendikular ist, so ist nach §. 35.:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$
$$\xi''\xi' + \eta''\eta' + \zeta''\zeta' = 0, \text{ folglich (Einl. alg. Vork. No. 1):}$$
$$\xi' : \eta' : \zeta' = \mathfrak{X}' : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Z}'.$$

Man kann also einen unbekannten Factor λ annehmen, mit welchem man ξ', η', ζ' multipliciren muß, damit sie gleich $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ werden; also ist;

$$\lambda^2\xi'^2 = \mathfrak{X}'^2 \quad \lambda^2\eta'^2 = \mathfrak{Y}'^2 \quad \lambda^2\zeta'^2 = \mathfrak{Z}'^2, \text{ folglich nach §. 25.:}$$
$$\lambda^2 = \mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2, \text{ also } \lambda = \sqrt{\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2}.$$

Nennt man nun den Winkel, welchen die beiden gegebenen Linien bilden ω, so ist nach §. 34.

$$\sin.\,\omega = \sqrt{\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2}, \text{ also } \lambda = \sin.\,\omega,$$
$$\text{folglich } \xi' = \frac{\mathfrak{X}'}{\sin.\,\omega} \quad \eta' = \frac{\mathfrak{Y}'}{\sin.\,\omega} \quad \zeta' = \frac{\mathfrak{Z}'}{\sin.\,\omega}$$
$$\text{daher ist } \xi'^2 = \frac{\xi'\mathfrak{X}'}{\sin.\,\omega} \quad \eta'^2 = \frac{\eta'\mathfrak{Y}'}{\sin.\,\omega} \quad \zeta'^2 = \frac{\zeta'\mathfrak{Z}'}{\sin.\,\omega}.$$

Die Summe dieser 3 Gleichungen ist (§. 25. Einl. alg. Vork. No. 2):

---

*) Die Bedeutung dieser Buchstaben sehe man Einleitung „algebraische Vorkenntnisse" No. 1.

$$1 = \frac{\mathfrak{K}}{\sin.\ \omega}, \text{ also } \mathfrak{K} = \sin.\ \omega,$$

$$\text{folglich } p'' = \frac{\mathfrak{X}''(a''-a)+\mathfrak{Y}''(b''-b)+\mathfrak{Z}''(c''-c)}{\sin.\ \omega}$$

$$p' = \frac{\mathfrak{X}'(a''-a)+\mathfrak{Y}'(b''-b)+\mathfrak{Z}'(c''-c)}{\sin.\ \omega}$$

$$p = \frac{\mathfrak{X}(a''-a)+\mathfrak{Y}(b''-b)+\mathfrak{Z}(c''-c)}{\sin.\ \omega}.$$

In diesen Gleichungen muß $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als bekannt angesehen werden, da ξ', η', ζ' schon gefunden sind; da jetzt p'' und p auch bekannt sind, kann man aus den ersten 9 Gleichungen dieses Paragraphen finden:

$$x = p\xi + a$$
$$y = p\eta + b$$
$$z = p\zeta + c$$
$$\text{und } x'' = a'' - p''\xi''$$
$$y'' = b'' - p''\eta''$$
$$z'' = c'' - p''\zeta''.$$

§. 41. Wenn die beiden Linien parallel wären, so müßten ihre Determinanten gleich seyn; p'' und p könnten dann also gar nicht gesucht werden, weil sie jeden beliebigen Werth haben könnten; ebenso x, y, z und x'', y'', z''. In diesem Falle würde $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ und $\sin.\ \omega$ gleich o werden, also hätten ξ', η', ζ' und p' den unbestimmten Werth $\frac{o}{o}$. Hier müßte man die Formeln von §. 38. gebrauchen.

Ein zweiter specieller Fall wäre es, wenn sich die beiden gegebenen Linien schneiden würden; für diesen Fall können aber alle obigen Formeln gelten, nur wird $x = x''$, $y = y''$, $z = z''$ und $p' = o$ seyn.

§. 42. Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den Determinanten einer Ebene*), (ξ, η, ζ), der Entfernung dieser Ebene vom Anfangspunkte der Coordinaten (p) und den Coordinaten eines beliebigen Punktes in dieser Ebene (x, y, z) zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des Punktes, in welchem das Perpendikel p die Ebene trifft, sind $p\xi$, $p\eta$, $p\zeta$. Bezeichnet man nun die Determinanten der Linie,

*) Siehe §. 16.

welche diesen Treffpunkt mit dem beliebig angenommenen Punkte in der Ebene verbindet, durch ξ', η', ζ', so ist nach §. 24.

$$\xi' = \frac{p\xi - x}{l} \qquad \eta' = \frac{p\eta - y}{l} \qquad \zeta' = \frac{p\zeta - z}{l},$$

wo l die Länge der Verbindungslinie bedeutet:

$$\xi\xi' = \frac{p\xi^2 - \xi x}{l} \qquad \eta\eta' = \frac{p\eta^2 - \eta y}{l} \qquad \zeta\zeta' = \frac{p\zeta^2 - \zeta z}{l}$$

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \cos. 90^\circ = o = \frac{p(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi x + \eta y + \zeta z)}{l},$$

also nach §. 25. $o = p - (\xi x + \eta y + \zeta z)$ oder

$$p = \xi x + \eta y + \zeta z.$$

Anmerk. Da dieses die allgemeinste Form einer Gleichung vom ersten Grade zwischen 3 veränderlichen Größen ist, so muß auch jede Gleichung vom ersten Grade zwischen 3 veränderlichen Größen die Gleichung einer Ebene seyn, wo die 3 Factoren der veränderlichen Größen die Determinanten der Ebene bedeuten, und die Summe der 3 Producte gleich der Entfernung der Ebene vom Anfangspuncte der Coordinaten ist.

§. 43. Aufgabe. Aus den Determinanten zweier Ebenen die Determinanten ihrer Durchschnittslinie und ihren Neigungswinkel zu finden.

Auflösung. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist derselbe, welchen 2 Perpendikel auf diesen Ebenen bilden; da aber die Determinanten der Ebenen eigentlich die des Perpendikels auf dieser Ebene sind, so ist diese Aufgabe schon in §. 33. und 34. gelöst.

Die Durchschnittslinie muß, da sie in beiden Ebenen liegt, perpendikulär auf beiden Perpendikeln seyn; nennt man also die Determinanten der beiden Ebenen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ', und die der Durchschnittslinie ξ'', η'', ζ'', so ist

$$\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = o$$

$$\xi''\xi' + \eta''\eta' + \zeta''\zeta' = o$$

$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = \mathfrak{X}'' : \mathfrak{Y}'' : \mathfrak{Z}'',$$

folglich $\lambda\xi'' = \mathfrak{X}''$, $\lambda\eta'' = \mathfrak{Y}''$, $\lambda\zeta'' = \mathfrak{Z}''$

$$\lambda^2 = \lambda^2(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) = \mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2,$$

also $\lambda = \sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2}$, folglich

$$\xi'' = \frac{\mathfrak{X}''}{\sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2}} \quad \eta'' = \frac{\mathfrak{Y}''}{\sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2}} \quad \zeta'' = \frac{\mathfrak{Z}''}{\sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2}}$$

oder wenn man den Winkel, welchen beide Ebenen bilden, ω nennt, so ist $\sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2} = \sin.\ \omega$, also

$$\xi'' = \frac{\mathfrak{X}''}{\sin.\ \omega} \quad \eta'' = \frac{\mathfrak{Y}''}{\sin.\ \omega} \quad \zeta'' = \frac{\mathfrak{Z}''}{\sin.\ \omega}.$$

§. 44. Nach diesen Formeln lassen sich die Determinanten der Durchschnittslinien einer Ebene mit den Fundamentalebenen finden. Es sind nehmlich die Determinanten der Ebene YZ, wenn man sie mit ξ', η', ζ' bezeichnet,

$$\xi' = 1 \quad \eta' = 0 \quad \zeta' = 0,$$

$$\text{also } \mathfrak{X}'' = 0 \quad \mathfrak{Y}'' = \zeta \quad \mathfrak{Z}'' = -\eta,$$

folglich die Determinanten der Durchschnittslinie der gegebenen Ebene

mit der Ebene YZ $\quad 0 \quad \dfrac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \quad \dfrac{-\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$

ebenso mit der Ebene ZX $\quad \dfrac{-\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}} \quad 0 \quad \dfrac{\xi}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}}$

— — — XY $\quad \dfrac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad \dfrac{-\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad 0.$

§. 45. Aufgabe. Den Abstand eines Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind, von einer Ebene zu finden, deren Determinanten ξ, η, ζ und deren Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten p ist; und die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem ein Perpendikel vom gegebenen Punkte auf diese Ebene dieselbe trifft.

Auflösung. Die gesuchte Entfernung heiße p', die gesuchten Coordinaten x', y', z'. Man lege durch den gegebenen Punkt eine Ebene parallel mit der ersten, so ist nach §. 42.

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p + p',$$

denn ξ, η, ζ sind auch die Determinanten dieser Ebene, weil sie mit der ersten parallel ist, und $p + p'$ ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Axensystems, also $p' = \xi x + \eta y + \zeta z - p$.

Nach §. 24. ist aber $\xi = \dfrac{x - x'}{p'} \quad \eta = \dfrac{y - y'}{p'} \quad \zeta = \dfrac{z - z'}{p'},$

$$\text{also } x' = x - \xi(\xi x + \eta y + \zeta z - p)$$
$$y' = y - \eta(\xi x + \eta y + \zeta z - p)$$
$$z' = z - \zeta(\xi x + \eta y + \zeta z - p).$$

§. 46. Zusatz. Sind außer der Ebene 2 Punkte A und A′ durch ihre Coordinaten a, b, c und a′, b′, c′ gegeben, und man bezeichnet die Coordinaten ihrer Projectionen auf die gegebene Ebene durch x, y, z und x′, y′, z′, so ist

$$x - x' = (a - a') - \xi[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]$$
$$y - y' = (b - b') - \eta[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]$$
$$z - z' = (c - c') - \zeta[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')], \text{ folglich}$$
$$(x - x')^2 = (a - a')^2 - 2\xi(a - a')[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')] + \xi^2[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2$$
$$(y - y')^2 = (b - b')^2 - 2\eta(b - b')[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')] + \eta^2[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2$$
$$(z - z')^2 = (c - c')^2 - 2\zeta(c - c')[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')] + \zeta^2[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2.$$

Addirt man diese 3 Gleichungen zusammen, so erhält man auf der einen Seite nach §. 22. das Quadrat der Projection der Linie AA′ auf die gegebene Ebene; auf der andern Seite ist die Summe der 3 ersten Glieder nach §. 22. gleich AA'^2, die Summe der 3 zweiten Glieder ist $-2[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2$, und die Summe der 3 dritten Glieder ist nach §. 25. $[\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2$, also hebt dieses dritte Glied die 2 des zweiten Gliedes auf, also

$$(\text{Proj. } A'A)^2 = A'A^2 - [\xi(a - a') + \eta(b - b') + \zeta(c - c')]^2.$$

§. 47. Aufgabe. Wenn die Determinanten zweier Linien und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes gegeben sind, die Determinanten der Ebene zu finden, welche durch beide Linien geht, und deren Entfernung vom Mittelpunkte des Axensystems.

Nennt man die Determinanten der gegebenen Linien ξ'', η'', ζ'' und ξ', η', ζ', die Coordinaten des Durchschnittspunktes a, b, c, die Entfernung der Ebene vom Mittelpunkte p, und ihre Determinanten ξ, η, ζ, so ist in §. 43. gezeigt, daß

$$\xi = \frac{\mathfrak{X}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}} \quad \eta = \frac{\mathfrak{Y}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}} \text{ und } \zeta = \frac{\mathfrak{Z}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}},$$

da aber nach §. 42. $p = \xi a + \eta b + \zeta c$, so ist

$$p = \frac{a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}} = \frac{a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}}{\sin. \varepsilon},$$

wo ω den Winkel bedeutet, welchen die beiden gegebenen Linien bilden.

§. 48. Wenn statt der Determinanten der zweiten Linie ξ'', η'', ζ'' die Coordinaten a', b', c' eines Punktes außer der ersten Linie gegeben wäre, so denke man sich durch die beiden gegebenen Punkte diese Linie gelegt und bestimme erst ihre Determinanten nach §. 24.

§. 49. Aufgabe. Wenn die Determinanten dreier Linien gegeben sind (die sich in einem Punkte schneiden), den Neigungswinkel einer jeden zur Ebene der beiden andern zu finden.

Der Cosinus eines solchen Neigungswinkels ist gleich dem Sinus des Winkels, welchen dieselbe Linie mit dem Perpendikel auf der Ebene der beiden andern bildet. Nach §. 47. findet man aber die Determinanten dieses Perpendikels, und nach §. 34. den Sinus des Winkels, welcher dann der Cosinus des gesuchten Neigungswinkels ist. Bezeichnet man die Linien mit a, b, c und ihre Determinanten mit ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ'', den Winkel welchen b und c bilden mit ω, den welchen c und a bilden durch ω', und den welchen a und b bilden durch ω'', den Neigungswinkel der Linie a zur Ebene bc durch A, den der Linie b zur Ebene ca durch B, und den der Linie c zur Ebene ab durch C, so sind die Determinanten der Ebene bc: $\frac{\mathfrak{X}}{\sin.\omega}$, $\frac{\mathfrak{Y}}{\sin.\omega}$, $\frac{\mathfrak{Z}}{\sin.\omega}$,

$$\text{also } \cos. A = \frac{1}{\sin.\omega}\sqrt{(\mathfrak{Y}\zeta-\mathfrak{Z}\eta)^2+(\mathfrak{Z}\xi-\mathfrak{X}\zeta)^2+(\mathfrak{X}\eta-\mathfrak{Y}\xi)^2}$$

$$\text{ebenso } \cos. B = \frac{1}{\sin.\omega'}\sqrt{(\mathfrak{Y}'\zeta'-\mathfrak{Z}'\eta')^2+(\mathfrak{Z}'\xi'-\mathfrak{X}'\zeta')^2+(\mathfrak{X}'\eta'-\mathfrak{Y}'\xi')^2}$$

$$\text{— } \cos. C = \frac{1}{\sin.\omega''}\sqrt{(\mathfrak{Y}''\zeta''-\mathfrak{Z}''\eta'')^2+(\mathfrak{Z}''\xi''-\mathfrak{X}''\zeta'')^2+(\mathfrak{X}''\eta''-\mathfrak{Y}''\xi'')^2}.$$

§. 50. Aufgabe. Die Richtung einer Ebene ist durch ihren Neigungswinkel zur Ebene XY und durch den Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen mit der Axe OX macht, bestimmt (siehe §. 17.); man soll die Determinanten dieser Ebene bestimmen.

Auflösung. Die näheren Bestimmungen und die Bezeichnung der gegebenen Winkel ersieht man in §. 17. Da hier nur die Determinanten einer Linie, nemlich des Perpendikels auf der gegebenen Ebene zu bestimmen sind, so läßt sich diese Aufgabe auf die des §. 32. zurückführen, und es braucht hier nur gezeigt zu werden,

wie in den 4 Fällen, die §. 17. angeführt sind, die Formel sich ändert. Im ersten Falle, wo $\omega < 90^\circ$ und $\varphi < 90^\circ$,

war $\beta = \omega + 90^\circ$ und $\lambda = \varphi + 90^\circ$, also

$$\cos.\beta = -\sin.\omega$$
$$\sin.\beta = \cos.\omega$$
$$\cos.\lambda = -\sin.\varphi$$
$$\sin.\lambda = \cos.\varphi,$$

also nach §. 32.

$$\xi = \sin.\omega \sin.\varphi$$
$$\eta = -\sin.\omega \cos.\varphi$$
$$\zeta = \cos.\omega.$$

Im zweiten Falle, wo $\omega > 90^\circ$ und $\varphi < 90^\circ$,

war $\beta = \omega - 90^\circ$ $\lambda = \varphi + 90^\circ$, also

$$\cos.\beta = \sin.\omega$$
$$\sin.\beta = -\cos.\omega,$$

also

$$\xi = -\sin.\omega \sin.\varphi$$
$$\eta = \sin.\omega \cos.\varphi$$
$$\zeta = -\cos.\omega.$$

Im dritten Falle, wo $\omega > 90^\circ$ und $\varphi > 90^\circ$,

war $\beta = 270^\circ - \omega$ und $\lambda = \varphi - 90^\circ$, also

$$\cos.\beta = -\sin.\omega$$
$$\sin\beta = -\cos.\omega$$
$$\cos.\lambda = \sin.\varphi$$
$$\sin.\lambda = -\cos.\varphi,$$

also

$$\xi = -\sin.\omega \sin.\varphi$$
$$\eta = \sin.\omega \cos.\varphi$$
$$\zeta = -\cos.\omega.$$

Im vierten Falle, wo $\omega < 90^\circ$ und $\varphi > 90^\circ$,

war $\beta = 90^\circ - \omega$ und $\lambda = \varphi - 90^\circ$, also

$$\cos.\beta = \sin.\omega$$
$$\sin.\beta = \cos.\omega,$$

also

$$\xi = \sin.\omega \sin.\varphi$$
$$\eta = -\sin.\omega \cos.\varphi$$
$$\zeta = \cos.\omega.$$

Da nun im 2ten und 3ten Falle ξ, η, ζ das umgekehrte Zeichen haben, als im 1sten und 4ten Falle, das Perpendikel auf einer Ebene aber nach beiden Seiten beliebig für positiv oder negativ gelten kann, so kann man diese zwei verschiedenen

Formeln für eine ansehen, und es ist ganz einerlei, welche man zum Gebrauche wählt.

§. 51. Aufgabe. Die Lage einer Ebene sey durch die Durchschnittspunkte derselben mit den Axen bestimmt, man soll ihre Determinanten und ihre Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten finden.

Auflösung. Die Stücke, welche die Ebene von den 3 Axen abschneidet, heißen a, b, c, und die Entfernung der Ebene vom Mittelpunkte des Axensystems heiße p, so ist $\xi = \frac{p}{a}$ $\quad \eta = \frac{p}{b}$ $\quad \zeta = \frac{p}{c}$, also

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$p^2 (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = a^2b^2c^2,$$

$$\text{also } p = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\text{folglich } \xi = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\eta = \frac{ca}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\zeta = \frac{ab}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}.$$

§. 52. Setzt man in der Gleichung $p = \xi x + \eta y + \zeta z$ statt ξ, η, ζ, ihre Werthe (aus §. 51.) $\frac{p}{a}$, $\frac{p}{b}$ und $\frac{p}{c}$, so erhält man eine sehr brauchbare Gleichung der Ebene $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ oder $abc = xbc + yca + zab$.

§. 53. Aufgabe. Wenn die Coordinaten dreier Punkte gegeben sind, die Determinanten der Ebene zu finden, welche sich durch diese 3 Punkte legen läßt, und ihre Entfernung vom Mittelpunkt des Axensystems.

Auflösung. Die Coordinaten der 3 gegebenen Punkte heißen x, y, z — x′, y′, z′ — x″, y″, z″; die Determinanten der Ebene ξ, η, ζ und die Entfernung derselben vom Mittelpunkte des Axensystems p, so ist

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p$$
$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' = p$$
$$\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'' = p.$$

Diese Gleichungen multiplicire man, die erste mit X, die zweite mit X', die dritte mit X' (siehe Einl. alg. Vork. No. 1.) und addire die 3 Produkte zusammen, so erhält man (Einl. alg. Vork. No. 2. und 3.) $\xi K = p(X + X' + X'')$.

Bezeichnet man diese Summe ein für alle Mal

$X + X' + X''$ durch $\overline{X}$,

ebenso $Y + Y' + Y''$ durch $\overline{Y}$,

$Z + Z' + Z''$ durch $\overline{Z}$,

so ist $\xi K = p\overline{X}$, ebenso $\eta K = p\overline{Y}$, $\zeta K = p\overline{Z}$,

also $K^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = p^2(\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2)$, bezeichnet man nun diese Summe $\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2$ durch S^2, so ist (§. 25.)

$$K^2 = p^2 S^2, \text{ also}$$
$$p = \frac{K}{S}.$$

Aus den 3 obigen Gleichungen folgt aber auch, daß

$$\xi : \eta : \zeta = \overline{X} : \overline{Y} : \overline{Z}, \text{ also}$$
$$\xi = \frac{\overline{X}}{\sqrt{\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2}}, \text{ oder } \xi = \frac{\overline{X}}{S}$$
$$\text{ebenso } \eta = \frac{\overline{Y}}{S}$$
$$\zeta = \frac{\overline{Z}}{S}.$$

§. 54. Bezeichnet man die 3 gegebenen Punkte durch A, B, C und die Linie BC durch a, CA durch b und AB durch c, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$ABC = \frac{bc \sin. A}{2}.$$

Es sind aber nach §. 24. die Determinanten der Linie b

$$\frac{x'' - x}{b}, \quad \frac{y'' - y}{b} \text{ und } \frac{z'' - z}{b};$$

ebenso die Determinanten der Linie c

$$\frac{x - x'}{c},\ \frac{y - y'}{c}\ \text{und}\ \frac{z - z'}{c};$$

also ist (§. 34.)

$$\sin. A = \sqrt{\left[\frac{y''-y}{b}\cdot\frac{z-z'}{c} - \frac{y-y'}{c}\cdot\frac{z''-z}{b}\right]^2 + \left[\frac{z''-z}{b}\cdot\frac{x-x'}{c} - \frac{z-z'}{c}\cdot\frac{x''-x}{b}\right]^2 + \left[\frac{x''-x}{b}\cdot\frac{y-y'}{c} - \frac{x-x'}{c}\cdot\frac{y''-y}{b}\right]^2}$$

Aus diesem weitläuftigen Ausdrucke kann man erstens den Nenner bc absondern, dann aber noch jede der drei Größen folgendermaßen vereinfachen:

$$(y''-y)(z-z') - (y-y')(z''-z) = [y''z - y''z' - yz + yz'] - [yz'' - yz - y'z'' + y'z],$$

diesen Ausdruck anders geordnet giebt

$$y'z'' - z'y'' + y''z - z''y + yz' - zy' = X + X' + X'' = \bar{X},$$

$$\text{ebenso ist } (z''-z)(x-x') - (z-z')(x''-x) = \bar{Y}$$

$$(x''-x)(y-y') - (x-x')(y''-y) = \bar{Z},$$

$$\text{also } \sin. A = \frac{1}{bc}\sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2} = \frac{S}{bc}$$

also $\frac{bc \sin. A}{2}$ oder der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2}S$.

§. 55. Bezeichnet man die Projectionen der Punkte A, B, C, in der Ebene YZ mit A', B', C', so ist das Dreieck A'B'C' die Projection des Dreiecks ABC. Die Coordinaten der Punkte A', B', C' sind aber o, y, z — o, y', z' und o, y'', z''. Will man also den Inhalt der Projection A'B'C' finden, so setze man in $\frac{1}{2}S$ die Coordinaten $x = x' = x'' = 0$, dadurch wird aber Y, Y', Y'' und Z, Z', Z'' gleich o, also auch $\bar{Y}$ nnd $\bar{Z}$; $\bar{X}$ hingegen bleibt unverändert, da es von x, x', x'' unabhängig ist, also wird $S = \bar{X}$, folglich sind die Projectionen des Δ ABC

in der Ebene YZ $= \frac{1}{2}\bar{X}$

— — — ZX $= \frac{1}{2}\bar{Y}$

— — — XY $= \frac{1}{2}\bar{Z}$.

Da aber $S^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2$ und $\frac{1}{2}S$ der Inhalt des Dreiecks selbst ist, so ist der Inhalt jedes Dreiecks gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der Projectionen in den drei Hauptebenen.

§. 56. Die Projection des Dreiecks BCO in der Ebene YZ ist das Dreieck B'C'O; die Coordinaten dieser 3 Punkte sind o, y', z' — o, y'', z'' und o, o, o. Wendet man diese Werthe an, um daraus $\frac{1}{2}S$ zu finden, so ist nicht nur $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ gleich o, sondern auch X' und X'', also wird S für diesen Fall gleich X, folglich ist

$B'C'O = \frac{1}{2}X$, ebenso findet man den Flächeninhalt der andern Projectionen des Dreiecks BCO in der Ebene $ZX = \frac{1}{2}Y$, in der Ebene $XY = \frac{1}{2}Z$. Ebenso sind die Projectionen der andern Seitendreiecke CAO und ABO gleich $\frac{1}{2}X'$, $\frac{1}{2}Y'$, $\frac{1}{2}Z'$ und $\frac{1}{2}X''$, $\frac{1}{2}Y''$, $\frac{1}{2}Z''$.

§. 57. Der körperliche Inhalt der Pyramide ABCO ist $p \cdot \frac{ABC}{3}$. Es ist aber $ABC = \frac{1}{2}S$, also ist $ABCO = \frac{1}{6}pS = \frac{1}{6}K$.

Also ist $\frac{1}{2}K$ gleich dem Parallelepipedon, welches diese 4 Punkte zu Eckpunkten hat.

Rückblick. (§. 53 — 57.)

Wenn x, y, z mit den Indices 0, 1, 2 die Coordinaten dreier Punkte sind, und diese Punkte mit dem Mittelpunkte des Axensystems zu einer Pyramide verbunden werden, so bedeuteten X, Y, Z mit den Indices 0, 1, 2 die doppelten Projectionen der Seitendreiecke in den 3 Hauptebenen, und die Grundsätze der Symmetrie, mit möglichster Strenge angewandt, zeigen sogleich, welche von den 9 Größen man für jede Projection zu nehmen hat.

$\overline{X}$, $\overline{Y}$ und $\overline{Z}$ sind die doppelten Projectionen der Grundfläche*), S der doppelte Inhalt der Grundfläche und K der sechsfache Inhalt der Pyramide.

§. 58. Aus der Gleichung (§. 53.) $\zeta = \frac{\overline{X}}{S}$ folgt $\frac{1}{2}S\zeta = \frac{1}{2}\overline{X}$ oder $\zeta \cdot ABC = A'B'C'$. Also ist die Projection eines Dreiecks (mithin jeder Ebene) gleich dem Dreiecke (der Ebene) selbst, multiplicirt mit der correspondirenden Determinante, folglich verhalten sich auch die 3 Projectionen einer Ebene in den 3 Hauptebenen, wie die Determinanten der Ebene.

§. 59. Nach §. 54. ist $\sin. A = \frac{S}{bc}$, $\sin. B = \frac{S}{ca}$,

$$\text{folglich } \sin. A : \sin. B = \frac{S}{bc} : \frac{S}{ca}, \text{ oder}$$

$$\sin. A : \sin B = a : b.$$

*) Daß die Projection der Grundfläche gleich der Summe der Projectionen der Seitendreiecke ist, enthält keinen Widerspruch, wenn man bedenkt, daß wenigstens eine der drei Größen X, X' und X'' durch die cyklische Ordnung einen negativen Werth erhält.

Dieses ist die Fundamentalgleichung der ebenen Trigonometrie und aus ihr kann die ganze Berechnung der Dreiecke hergeleitet werden *); denn die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos.\,A.$$

ist schon in Euklids Elementen enthalten (siehe die Note zu §. 33.), gehört also in die Geometrie.

§. 60. Bezeichnet man das Perpendikel vom Punkte A auf die Ebene BCO mit AP, und das Perpendikel von A auf die Linie BO mit AQ, so ist PQ ebenfalls ein Perpendikel auf BO; folglich AQP der Neigungswinkel der Ebenen BCO und ABO. Bezeichnet man ferner diesen Neigungswinkel durch $\mathfrak{B}$ (ebenso durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, die Neigungswinkel der andern Seitenflächen) und den Winkel BOC durch α, COA durch β und AOB durch γ, AO durch ϱ, BO durch ϱ' und CO durch ϱ'', so ist:

$$AQ = AO\,\sin.\,AOB, \text{ also}$$

$$AQ = \varrho\,\sin.\,\gamma,$$

$$AP = AQ\,\sin.\,AQP, \text{ also}$$

$$AP = \varrho\,\sin.\,\gamma\,\sin.\,\mathfrak{B},$$

$$\Delta\,BOC = \frac{OB\,.\,OC\,.\,\sin.\,BOC}{2} = \frac{\varrho'\varrho''\,\sin.\,\alpha}{2}$$

Der Inhalt der Pyramide ABCO $= \frac{1}{3}AP\,.\,BOC$, aber auch $= \frac{1}{6}K$,

also ist $K = \varrho\varrho'\varrho''\,\sin.\,\gamma\,\sin.\,\alpha\,\sin.\,\mathfrak{B}$,

ebenso ist $K = \varrho\varrho'\varrho''\,\sin.\,\alpha\,\sin.\,\beta\,\sin.\,\mathfrak{C}$,

$K = \varrho\varrho'\varrho''\,\sin.\,\beta\,\sin.\,\gamma\,\sin.\,\mathfrak{A}$.

§. 61. Nimmt man an $\varrho = \varrho' = \varrho''$, und nimmt ϱ als Einheit an, so liegen die 3 Punkte A, B, C in der Oberfläche einer Kugel, deren Radius $= 1$, und bilden auf dieser Kugel ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten α, β, γ und dessen Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind. Nach §. 24. Anmerk. kann man in diesem Falle für x, y, z mit den Indices 0, 1, 2, die Determinanten ξ, η, ζ mit den Indices 0, 1, 2 setzen. Also ist für $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 1$

das ebene Dreieck ABC $= \frac{1}{2}\mathfrak{S}$,

die Pyramide ABCO $= \frac{1}{6}\mathfrak{K}$,

die doppelten Projectionen des Dreiecks ABC $= \overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{Z}}$,

die Projectionen der Seitendreiecke $= \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ mit den Indices 0, 1. 2,

*) Die Berechnung der Dreiecke hier wirklich daraus herzuleiten läge außer dem Zwecke dieses Buches; genug daß hier die Fundamentalformel entwickelt worden ist.

Die Seitendreiecke selbst (§. 60.), da ϱ' und $\varrho'' = 1$, sind gleich

$$\frac{\sin.\alpha}{2} \qquad \frac{\sin.\beta}{2} \qquad \frac{\sin.\gamma}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2} \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{X}''^2 + \mathfrak{Y}''^2 + \mathfrak{Z}''^2}$$

ferner ist $\mathfrak{K} = \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \sin.\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{K} = \sin.\gamma\ \sin.\alpha\ \sin.\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{K} = \sin.\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\mathfrak{C},$$

also $\sin.\beta\ \sin.\mathfrak{A} = \sin.\alpha\ \sin.\mathfrak{B}$, folglich

$$\sin.\alpha : \sin.\beta = \sin.\mathfrak{A} : \sin.\mathfrak{B},$$

welches die erste Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie ist.

§. 62. Bezeichnet man die Determinanten der Ebene BOC mit $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$, die der Ebene COA mit $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ und die der Ebene AOB mit $\dddot{\xi}, \dddot{\eta}, \dddot{\zeta}$, so ist nach §. 47.

$$\dot{\xi} = \frac{\mathfrak{X}}{\sin.\alpha} \qquad \dot{\eta} = \frac{\mathfrak{Y}}{\sin.\alpha} \qquad \dot{\zeta} = \frac{\mathfrak{Z}}{\sin.\alpha}$$

$$\ddot{\xi} = \frac{\mathfrak{X}'}{\sin.\beta} \qquad \ddot{\eta} = \frac{\mathfrak{Y}'}{\sin.\beta} \qquad \ddot{\zeta} = \frac{\mathfrak{Z}'}{\sin.\beta}$$

$$\dddot{\xi} = \frac{\mathfrak{X}''}{\sin.\gamma} \qquad \dddot{\eta} = \frac{\mathfrak{Y}''}{\sin.\gamma} \qquad \dddot{\zeta} = \frac{\mathfrak{Z}''}{\sin.\gamma}.$$

Der Winkel $\mathfrak{A}$ oder der Neigungswinkel der Ebenen COA und AOB ist aber gleich dem Winkel den die beiden Perpendikel auf diesen Ebenen bilden, d. h. die Linien, deren Determinanten $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ und $\dddot{\xi}, \dddot{\eta}, \dddot{\zeta}$ sind. Also ist

$$\cos.\mathfrak{A} = \ddot{\xi}\dddot{\xi} + \ddot{\eta}\dddot{\eta} + \ddot{\zeta}\dddot{\zeta} = \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}''}{\sin.\beta\ \sin.\gamma},$$

ebenso ist $\cos.\mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Z}}{\sin.\gamma\ \sin.\alpha}$

$$\cos.\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'}{\sin.\alpha\ \sin.\beta}.$$

Setzt man nun in der Gleichung (Einl. alg. Vork. No. 4.)

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'') - (\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')(\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta'') = -(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}''+\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')$$

statt $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ . . 1

— $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta''$ . . cos. α

statt $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$ . . $\cos.\gamma$

— $\xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta''$ . . $\cos.\beta$

— $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}''+\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}''+\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}''$ . . $\cos.\mathfrak{A}\ \sin.\gamma\ \sin.\beta$,

so ist $\cos.\alpha - \cos.\beta\ \cos.\gamma = -\sin.\beta\ \sin.\gamma\ \cos.\mathfrak{A}$, oder

$$\cos.\alpha = \cos.\beta\ \cos.\gamma - \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \cos.\mathfrak{A},$$

ebenso $\cos.\beta = \cos.\gamma\ \cos.\alpha - \sin.\gamma\ \sin.\alpha\ \cos.\mathfrak{B}$,

$$\cos.\gamma = \cos.\alpha\ \cos.\beta - \sin.\alpha\ \sin.\beta\ \cos.\mathfrak{C},$$

welches die zweite Fundamentalgleichung der spärischen Trigonometrie ist.

Anmerkung. Daß hier das Zeichen — statt + steht, kommt daher, weil $\cos.\mathfrak{A}$ im Anfange der Rechnung eben sowohl den Cosinus des Nebenwinkels bedeuten kann.

§. 63. Setzt man aber in der Gleichung (Einl. alg. Vork. No. 6.)

$$(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}''+\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}''+\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'')-(\mathfrak{X}\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})(\mathfrak{X}\mathfrak{X}''+\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}''+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'')$$
$$= -\mathfrak{K}^2(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')$$

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \sin.^2\alpha$$
$$\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}'' = \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \cos.\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{X}''\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}''\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}''\mathfrak{Z} = \sin.\gamma\ \sin.\alpha\ \cos.\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = \sin.\alpha\ \sin.\beta\ \cos.\mathfrak{C}$$
$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \cos.\alpha$$

und $\mathfrak{K}^2 = \sin.^2\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \sin.\mathfrak{B}\ \sin.\mathfrak{C}$,

weil $\mathfrak{K} = \sin.\gamma\ \sin.\alpha\ \sin.\mathfrak{B} = \sin.\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\mathfrak{C}$ (§. 61.),

so ist $\sin.^2\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \cos.\mathfrak{A} - \sin.^2\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \cos.\mathfrak{B}\ \cos.\mathfrak{C}$

$$= -\cos.\alpha\ \sin.^2\alpha\ \sin.\beta\ \sin.\gamma\ \sin.\mathfrak{B}\ \sin.\mathfrak{C},$$

folglich $\cos.\mathfrak{A} - \cos.\mathfrak{B}\ \cos.\mathfrak{C} = -\cos.\alpha\ \sin.\mathfrak{B}\ \sin.\mathfrak{C}$, oder

$$\cos.\mathfrak{A} = \cos.\mathfrak{B}\ \cos.\mathfrak{C} - \sin.\mathfrak{B}\ \sin.\mathfrak{C}\ \cos.\alpha,$$

ebenso $\cos.\mathfrak{B} = \cos.\mathfrak{C}\ \cos.\mathfrak{A} - \sin.\mathfrak{C}\ \sin.\mathfrak{A}\ \cos.\beta$

$$\cos.\mathfrak{C} = \cos.\mathfrak{A}\ \cos.\mathfrak{B} - \sin.\mathfrak{A}\ \sin.\mathfrak{B}\ \cos.\gamma,$$

welches die dritte Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie ist. Aus diesen 3 Gleichungen leitet man alle Berechnungen der sphärischen Dreiecke ab; also kann man die ganze ebene und sphärische Trigonometrie als Corollarien zu §. 53. ansehen.

§. 64. Wenn $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ und ξ'', η'', ζ'' nicht unmittelbar gegeben sind, sondern wie im §. 11. und §. 32., so ist

$$\xi = \cos.\beta\ \cos.\lambda \qquad \xi' = \cos.\beta'\ \cos.\lambda' \qquad \xi'' = \cos.\beta''\ \cos.\lambda''$$
$$\eta = \cos.\beta\ \sin.\lambda \qquad \eta' = \cos.\beta'\ \sin.\lambda' \qquad \eta'' = \cos.\beta''\ \sin.\lambda''$$
$$\zeta = \sin.\beta \qquad \zeta' = \sin.\beta' \qquad \zeta'' = \sin.\beta''.$$

Setzt man diese Werthe in der Formel (Einl. alg. Vork. No. 2.)

$$\mathfrak{K} = \zeta\mathfrak{Z} + \zeta'\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}'',$$

so ist $\mathfrak{Z} = \cos.\beta' \cos\lambda' . \cos.\beta'' \sin.\lambda'' - \cos.\beta' \sin.\lambda' . \cos.\beta'' \cos.\lambda''$,

also $\mathfrak{Z} = \cos.\beta' \cos.\beta'' (\cos.\lambda' \sin.\lambda'' - \sin.\lambda' \cos.\lambda'') = \cos.\beta' \cos.\beta'' \sin.(\lambda'' - \lambda')$,

ebenso $\mathfrak{Z}' = \cos.\beta'' \cos.\beta \sin.(\lambda - \lambda'')$ und $\mathfrak{Z}'' = \cos.\beta \cos.\beta' \sin.(\lambda' - \lambda)$,

also $\zeta\mathfrak{Z} = \sin.\beta \cos.\beta' \cos.\beta'' \sin.(\lambda'' - \lambda') = \cos.\beta \cos.\beta' \cos.\beta'' \operatorname{tang}.\beta \sin.(\lambda'' - \lambda')$,

ebenso $\zeta'\mathfrak{Z}' = \cos.\beta . \cos.\beta' . \cos.\beta'' \operatorname{tang}.\beta' \sin.(\lambda - \lambda'')$

$\zeta''\mathfrak{Z}'' = \cos.\beta . \cos.\beta' . \cos.\beta'' \operatorname{tang}.\beta'' \sin.(\lambda' - \lambda)$,

also $\mathfrak{K} = \cos.\beta \cos.\beta' \cos.\beta'' [\operatorname{tang}.\beta \sin.(\lambda'' - \lambda') + \operatorname{tang}.\beta' \sin.(\lambda - \lambda'') + \operatorname{tg}.\beta'' \sin.(\lambda' - \lambda)]$.

§. 65. Aufgabe. Wenn durch den Mittelpunkt des Axensystems ein neues rechtwinkliges Axensystem gelegt ist, dessen Lage nach §. 19. durch den Neigungswinkel der Ebenen XY, durch den Winkel, welchen die Durchschnittslinie derselben mit der alten Axe OX, und durch den, welchen sie mit der neuen Axe OX bildet, bestimmt ist; die Determinanten der neuen Axen in Bezug auf die alten Axen zu finden.

Auflösung. Die 3 gegebenen Winkel mögen wie in §. 19. durch ω, φ und ψ bezeichnet seyn. Die Determinanten der neuen Axe der x heißen ξ, η, ζ, die der neuen Axe der y heißen ξ', η', ζ', und die der neuen Axe der z heißen ξ'', η'', ζ''. Nun beschreibe man um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt eine Kugel mit einem Radius gleich der Einheit; so schneiden die 6 Axen diese Kugelfläche, und die Durchschnittspunkte der alten Axen mögen X, Y, Z, und die der neuen Axen X', Y', Z', heißen, so ist:

$$\xi = \cos.X'X \qquad \xi' = \cos.Y'X \qquad \xi'' = \cos.Z'X$$
$$\eta = \cos.X'Y \qquad \eta' = \cos.Y'Y \qquad \eta'' = \cos.Z'Y$$
$$\zeta = \cos.X'Z \qquad \zeta' = \cos.Y'Z \qquad \zeta'' = \cos.Z'Z.$$

Nennt man nun den Punkt, in welchem die Durchschnittslinie der beiden Ebenen XY die Kugelfläche schneidet, Q, so ist:

$$\varphi = XOQ \qquad \psi = X'OQ \qquad \omega = ZOZ',$$

denn die beiden Axen OZ und OZ' bilden als Perpendikel auf den Ebenen XY den selben Winkel, als die Ebenen selbst. Betrachtet man zuvor den in §. 19. zuerst aufgeführten Fall, wenn ω, φ und ψ kleiner als 90° sind, und vergleicht die 3 andern Fälle mit den zuerst gefundenen Formeln, so wird man sehen, daß diese für alle 4 Fälle dieselben sind.

1) In dem sphärischen Dreiecke XQX' ist (§. 62.)

$$\cos. X'X = \cos. XQ \cos. X'Q - \sin. XQ \sin. X'Q \cos. XQX',$$

da nun $XQX' = 180° - \omega$ ist, so ist auch

$$\xi = \cos. \varphi \cos. \psi + \sin. \varphi \sin. \psi \cos. \omega.$$

In dem Dreiecke X'QY ist

$$\cos. X'Y = \cos. X'Q \cos. QY - \sin. X'Q \sin. QY \cos. X'QY,$$

da nun $QY = 90° - QX = 90° - \varphi$ und $X'QY = \omega$ ist, so ist

$$\eta = \cos. \psi \cos. (90° - \varphi) - \sin. \psi \sin. (90° - \varphi) \cos. \omega,$$

$$\text{oder } \eta = \cos. \psi \sin. \varphi - \sin. \psi \cos. \varphi \cos. \omega.$$

In dem Dreiecke X'QZ ist

$$\cos. X'Z = \cos. X'Q \cos. QZ - \sin. X'Q \sin. QZ \cos. X'QZ,$$

da nun $QZ = 90°$ und $X'QZ = 90° - \omega$ ist, so ist

$$\zeta = - \sin. \psi \sin. \omega.$$

In dem Dreiecke XQY' ist

$$\cos. Y'X = \cos. XQ \cos. QY' - \sin. XQ \sin. QY' \cos. XQY',$$

da nun $QY' = 90° + \psi$ und $XQY' = 180° - \omega$ ist, so ist

$$\xi' = - \cos. \varphi \sin. \psi + \sin. \varphi \cos. \psi \cos. \omega.$$

In dem Dreiecke Y'QY ist

$$\cos. Y'Y = \cos. Y'Q \cos. QY - \sin. Y'Q \sin. QY \cos. Y'QY,$$

da nun $Y'Q = 90° + \psi$, $QY = 90° - \varphi$ und $Y'QY = \omega$ ist, so ist

$$\eta' = - \sin. \psi \sin. \varphi - \cos. \varphi \cos. \psi \cos. \omega.$$

In dem Dreiecke Y'QZ ist

$$\cos. Y'Z = \cos. Y'Q \cos. QZ - \sin. Y'Q \sin. QZ \cos. Y'QZ,$$

da nun $Y'Q = 90° + \psi$, $QZ = 90°$ und $Y'QZ = 90° - \omega$ ist, so ist

$$\zeta' = - \cos. \psi \sin. \omega.$$

Die Determinanten der neuen Axe OZ′ sind die der neuen Ebene X′Y′, also (nach §. 50.) für alle 4 möglichen Fälle

$$\xi'' = \sin.\omega \ \sin.\varphi$$
$$\eta'' = -\sin.\omega \ \cos.\varphi$$
$$\zeta'' = \cos.\omega.$$

Es bleibt also noch übrig zu untersuchen, ob die 6 ersten Formeln in den 3 andern Fällen unter dieselbe Formel gehören oder ob sich die Formel ändert.

2) Im zweiten Falle, wo $\varphi < 90^\circ$ aber $\omega > 90^\circ$ ist, ist im Dreiecke X′QX wie im ersten Falle (ja selbst wenn $\varphi > 90^\circ$ ist) $X'Q = \psi$, $XQ = \varphi$ und $X'QX = 180^\circ - \omega$, also gilt die erste Formel für alle 4 Fälle.

Im Dreiecke X′QY ist für den zweiten Fall keine Veränderung nöthig aber im dritten und vierten ist $\varphi > 90^\circ$, also $QY = \varphi - 90^\circ$ und X′QY nicht mehr $= \omega$, sondern $= 180^\circ - \omega$, also wird die Formel $\cos. X'Y = \cos. X'Q \,.\, \cos. QY - \sin. X'Q \ \sin. QY \ \cos. X'QY$; im dritten und vierten Falle heißen $\eta = \cos.\psi \ \sin.\varphi - \sin.\psi \ \cos.\varphi \ \cos.\omega$, denn da die beiden letzten Größen negativ sind, so bleibt die Formel doch dieselbe.

Im Dreiecke X′QZ hat die Veränderung von φ keinen Einfluß, und wenn ω stumpf wird, so ist der Winkel $X'QZ = \omega - 90^\circ$, also der Cosinus wie im ersten Falle.

Im Dreiecke Y′QX bleibt im zweiten, dritten und vierten Falle alles wie im ersten; also auch die Endformel.

Im Dreiecke Y′QY bleibt im zweiten Falle alles wie im ersten, im dritten und vierten aber wird $QY = \varphi - 90^\circ$, dafür aber auch Winkel $Y'QY = 180^\circ - \omega$, also bleibt auch hier die Endformel dieselbe, da (wie bei η) beide letzte Größen negativ werden.

Im Dreiecke Y′QZ kommt auf φ nichts an, und wenn $\omega > 90^\circ$ ist; so ist $Y'QZ = \omega - 90^\circ$, also $\cos. Y'QZ$ ebenfalls $\sin.\omega$. Obige neun Formeln sind also allgemein gültig.

§. 66. Wenn man das neue Axensystem als gegeben ansieht, so sind die Determinanten der alten Axe OX, ξ, ξ', ξ'', der alten Axe OY, η, η', η'' und der alten Axe OZ, ζ, ζ', ζ'', also ist auch

$$\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1 \text{ und } \eta\zeta + \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' = 0$$
$$\eta^2 + \eta'^2 + \eta''^2 = 1 \text{ und } \zeta\xi + \zeta'\xi' + \zeta''\xi'' = 0$$
$$\zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2 = 1 \text{ und } \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = 0.$$

§. 67. Aus den letzten Gleichungen folgt:

$$\xi : \xi' : \xi'' = \mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}''$$
$$\eta : \eta' : \eta'' = \mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}''$$
$$\zeta : \zeta' : \zeta'' = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}'',$$

da aber auch $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0$

$$\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0$$
$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0,$$

so verhält sich auch $\xi : \eta : \zeta = \mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{Z}$

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \mathfrak{X}' : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Z}'$$
$$\xi'' : \eta'' : \zeta'' = \mathfrak{X}'' : \mathfrak{Y}'' : \mathfrak{Z}''.$$

Setzt man nun $\lambda\xi = \mathfrak{X}$, so ist auch $\lambda\xi' = \mathfrak{X}'$, $\lambda\xi'' = \mathfrak{X}''$ und

$$\lambda\eta = \mathfrak{Y} \qquad \lambda\eta' = \mathfrak{Y}',\ \lambda\eta'' = \mathfrak{Y}''$$
$$\lambda\zeta = \mathfrak{Z} \qquad \lambda\zeta' = \mathfrak{Z}',\ \lambda\zeta'' = \mathfrak{Z}''$$

da nun $\lambda^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{X}''^2 = \sin.^2 \text{YOZ} = \sin.^2 90^0 = 1$, also $\pm\lambda = 1$; so ist nur noch durch einen besondern Fall zu bestimmen, ob $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$. Dazu wählt man am besten den Fall, wo beide Axensysteme in einander fallen, dann ist: $\xi = 1,\ \eta = 0,\ \zeta = 0,$

$$\xi' = 0,\ \eta' = 1,\ \zeta' = 0,$$
$$\xi'' = 0,\ \eta'' = 0,\ \zeta'' = 1, \text{ also } \xi = \lambda\mathfrak{X} \text{ oder } +1 = \lambda(+1 . +1 - 0),$$

also $\lambda = +1$, folglich $\xi = \mathfrak{X},\ \ \eta = \mathfrak{Y},\ \ \zeta = \mathfrak{Z}$

$$\xi' = \mathfrak{X}',\ \eta' = \mathfrak{Y}',\ \zeta' = \mathfrak{Z}'$$
$$\xi'' = \mathfrak{X}'',\ \eta'' = \mathfrak{Y}'',\ \zeta'' = \mathfrak{Z}''.$$

§. 68. **Aufgabe.** Wenn die Determinanten einer Linie (ξ, η, ζ) und die Determinanten eines neuen Axensystems gegeben sind, die Determinanten dieser Linie in Bezug auf das neue Axensystem zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Determinanten der Linie in Bezug auf das neue Axensystem durch $'\xi$, $'\eta$, $'\zeta$, so bedeutet $'\xi$ den Cosinus des Winkels, welchen die gegebene Linie mit der neuen Axe OX′ macht,

$$\text{also } {}'\xi = \dot{\xi}\xi + \dot{\eta}\eta + \dot{\zeta}\zeta$$
$$\text{ebenso } {}'\eta = \dot{\xi}\xi' + \dot{\eta}\eta' + \dot{\zeta}\zeta'$$
$${}'\zeta = \dot{\xi}\xi'' + \dot{\eta}\eta'' + \dot{\zeta}\zeta''.$$

§. 69. Aufgabe. Wenn die Coordinaten (x, y, z) eines Punktes P, die Determinanten eines neuen Axensystems und die Coordinaten des Mittelpunktes dieses neuen Systems (a, b, c) gegeben sind, die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf das neue Axensystem (x′, y′, z′) zu finden.

Auflösung. Nennt man den Mittelpunkt des neuen Axensystems O′, so sind die Determinanten der Linie O′P

$$\dot{\xi} = \frac{x - a}{O'P} \qquad \dot{\eta} = \frac{y - b}{O'P} \quad \text{und } \dot{\zeta} = \frac{z - c}{O'P}.$$

Die Determinanten dieser Linie in Bezug auf das neue Axensystem sind also

$${}'\xi = \frac{\xi(x-a) + \eta(y-b) + \zeta(z-c)}{O'P}, \quad {}'\eta = \frac{\xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c)}{O'P}$$

$$\text{und } {}'\zeta = \frac{\xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c)}{O'P}.$$

Nun ist aber $x' = {}'\xi \,.\, O'P \qquad y' = {}'\eta \,.\, O'P \qquad z' = {}'\zeta \,.\, O'P$,

$$\text{also } x' = \xi(x-a) + \eta(y-b) + \zeta(z-c)$$
$$y' = \xi'(x-a) + \eta'(y-b) + \zeta'(z-c)$$
$$z' = \xi''(x-a) + \eta''(y-b) + \zeta''(z-c).$$

§. 70. Diese 3 Gleichungen kann man auch folgendermaßen umändern:

$$x' = \xi x + \eta y + \zeta z - (\xi a + \eta b + \zeta c)$$
$$y' = \xi' x + \eta' y + \zeta' z - (\xi' a + \eta' b + \zeta' c)$$
$$z' = \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z - (\xi'' a + \eta'' b + \zeta'' c).$$

Da in diesen Formeln der negative Theil gar nicht von x, y, z abhängt, also in Bezug auf den Punkt P als constant anzusehen ist, so bleiben a′, b′, c′ (wenn man dadurch die negativen Größen bezeichnet) dieselben, wenn sich auch P verändert. Nimmt man nun an, P falle in den Mittelpunkt des alten Axensystems, so wird in den Formeln $x' = \xi x + \eta y + \zeta z - a'$

$$y' = \xi' x + \eta' y + \zeta' z - b'$$

$z' = \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z - c'$, der erste Theil jedesmal gleich o werden, weil x, y, z = o sind, also ist dann

$$x' = -a'; \quad y' = -b'; \quad z' = -c'.$$

Da aber P der Mittelpunkt des alten Axensystems ist, also x', y', z' dessen Coordinaten in Bezug auf das neue; so sind auch a', b', c' (nicht nur in diesem sondern in jedem Falle) diese Coordinaten des Mittelpunktes des alten Axensystems in Bezug auf das neue.

§. 71. Lehrsatz. Wenn 3 Ebenen, deren Determinanten $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ und ξ'', η'', ζ'', und deren Abstände vom Mittelpunkte des Axensystems p, p', p'' sind, sich in einer Linie schneiden, so finden folgende Bedingungsgleichungen statt:

$$\sin\alpha . \xi + \sin\beta . \xi' + \sin\gamma . \xi'' = 0$$
$$\sin\alpha . \eta + \sin\beta . \eta' + \sin\gamma . \eta'' = 0$$
$$\sin\alpha . \zeta + \sin\beta . \zeta' + \sin\gamma . \zeta'' = 0$$
$$\sin\alpha . p + \sin\beta . p' + \sin\gamma . p'' = 0,$$

wo denn $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

Beweis. Für diese 3 Ebenen gelten auch die Gleichungen (§. 42.):

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p$$
$$\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = p'$$
$$\xi'' x'' + \eta'' y'' + \zeta'' z'' = p'',$$

wo x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' die Coordinaten beliebiger Punkte in den 3 Ebenen sind. Nimmt man nun statt der beliebigen Punkte einen Punkt der Durchschnittslinie, so ist x, y, z in allen 3 Gleichungen dasselbe. Multiplicirt man die erste mit $\mathfrak{X}$, die zweite mit $\mathfrak{X}'$, die dritte mit $\mathfrak{X}''$ und addirt die 3 Producte, so erhält man

$$\mathfrak{K}x = p\mathfrak{X} + p'\mathfrak{X}' + p''\mathfrak{X}'',$$
$$\text{ebenso } \mathfrak{K}y = p\mathfrak{Y} + p'\mathfrak{Y}' + p''\mathfrak{Y}''$$
$$\mathfrak{K}z = p\mathfrak{Z} + p'\mathfrak{Z}' + p''\mathfrak{Z}''.$$

Dieselben Gleichungen gelten aber auch für einen andern Punkt x', y', z' in der Durchschnittslinie, der vom ersten um das positive Stück q abstehen mag. Also ist $\mathfrak{K}(x'-x) = 0$, also auch $\mathfrak{K}^2(x'-x)^2 = 0$, ebenso $\mathfrak{K}^2(y'-y)^2 = 0$ und $\mathfrak{K}^2(z'-z)^2 = 0$, folglich $\mathfrak{K}^2[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]$ oder $\mathfrak{K}^2 q^2 = 0$. Da nun q einen reellen Werth hat (wie oben angenommen ist), so muß $\mathfrak{K} = 0$ seyn. Nach §. 61. ist aber $\mathfrak{K}$ der sechsfache Inhalt einer Pyramide, welche die 3 Perpendikel auf die Ebenen, jedes gleich 1 gemacht, einschließen; folglich ist der Inhalt dieser Pyramide = 0, was nicht anders geschehen kann, als wenn alle 3 Perpendikel in einer Ebene liegen. Bezeichnet man nun die Abschnittspunkte der

3 Perpendikel, welche gleich 1 gemacht sind, in symmetrischer Ordnung mit A,B,C und die Winkel BOC, COA, AOB durch α, β, γ; so ist Δ BOC $= \frac{BO \cdot OC \cdot \sin. \alpha}{2}$ da aber BO $=$ OC $= 1$, so ist Dreieck BOC $= \frac{1}{2} \sin. \alpha$,

$$\text{ebenso COA} = \tfrac{1}{2} \sin. \beta$$
$$\text{AOB} = \tfrac{1}{2} \sin. \gamma,$$

also verhält sich BOC : COA : AOB $= \sin. \alpha : \sin. \beta : \sin. \gamma$, wo dann $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ seyn muß.

Nach §. 61. sind aber $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ die Projectionen dieser Dreiecke in der Ebene YZ, und wenn ξ die eine Determinante der Ebene bedeutet, in welcher die drei Dreiecke liegen, so ist $\mathfrak{X} = \xi$ BOC, $\mathfrak{X}' = \xi$ COA und $\mathfrak{X}'' = \xi$ AOB, also BOC : COA : AOB $= \mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}''$, ebenso auch wie $\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}''$ und wie $\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}''$, also auch $\mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}'' = \mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}'' = \sin. \alpha : \sin. \beta : \sin. \gamma$.

Da nun $\mathfrak{K} = 0$, so ist auch $\xi\mathfrak{X} + \xi'\mathfrak{X}' + \xi''\mathfrak{X}'' = 0$

$$\eta\mathfrak{Y} + \eta'\mathfrak{Y}' + \eta''\mathfrak{Y}'' = 0$$
$$\zeta\mathfrak{Z} + \zeta'\mathfrak{Z}' + \zeta''\mathfrak{Z}'' = 0,$$

folglich auch $\xi \sin. \alpha + \xi' \sin. \beta + \xi'' \sin. \gamma = 0$

$$\eta \sin. \alpha + \eta' \sin. \beta + \eta'' \sin. \gamma = 0$$
$$\zeta \sin. \alpha + \zeta' \sin. \beta + \zeta'' \sin. \gamma = 0,$$

da nun auch $p\mathfrak{X} + p'\mathfrak{X}' + p''\mathfrak{X}'' = 0$ ist (weil es $= \mathfrak{K}x$ ist), so ist auch $p \sin. \alpha + p' \sin. \beta + p'' \sin. \gamma = 0$.

§. 72. Lehrsatz. Wenn $\lambda\xi + \lambda'\xi' + \lambda''\xi'' = 0$

$$\lambda\eta + \lambda'\eta' + \lambda''\eta'' = 0$$
$$\lambda\zeta + \lambda'\zeta' + \lambda''\zeta'' = 0$$
$$\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' = 0,$$

so schneiden sich die 3 Ebenen deren Determinanten ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' und ξ'', η'', ζ'' sind, und deren Entfernungen vom Mittelpunkte des Axensystems p, p', p'' sind, in einer Linie.

Beweis. Aus den 3 ersten Gleichungen folgt:

$$\lambda : \lambda' : \lambda'' = \mathfrak{X} : \mathfrak{X}' : \mathfrak{X}'' = \mathfrak{Y} : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z} : \mathfrak{Z}' : \mathfrak{Z}'',$$

also ist auch $\xi\mathfrak{X} + \xi'\mathfrak{X}' + \xi''\mathfrak{X}'' = 0$ oder $\mathfrak{K} = 0$, folglich liegen die 3 Perpendikel, wie im vorigen Satze gezeigt ist, in einer Ebene; also sind die 3 Ebenen perpendi-

kular auf dieser Einen, in welcher die Perpendikel liegen; folglich müssen auch die Durchschnittslinien der 3 Ebenen parallel seyn.

Schneidet nun die dritte Ebene die beiden ersten nicht in der Linie, in welcher sie einander schneiden, so könnte doch eine Ebene, die parallel mit der dritten ist, sie in dieser Linie schneiden.

Der Abstand dieser Parallelebene vom Mittelpunkte des Axensystems heiße $\overline{p}$, so ist nach §. 71.

$$\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' \overline{p} = 0,$$

denn da λ'' nur von $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ abhängt, so kann hier λ'' nicht verändert werden; und eben so wenig λ oder λ', denn die Determinanten der vierten und dritten Ebene sind dieselben, da sie parallel sind.

Nun ist aber laut Bedingung

$$\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' = 0,$$

$$\text{also } p'' = \overline{p},$$

folglich sind die beiden Parallelebenen gleich weit vom Mittelpunkte des Axensystems entfernt, das heißt sie sind ein und dieselbe Ebene; also schneiden sich, unter obigen Bedingungen, alle drei Ebenen in Einer Linie.

§. 73. Aufgabe. Wenn eine Kugel durch die Coordinaten ihres Mittelpunktes (a, b, c) und durch ihren Radius (r) gegeben ist, eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes der Kugelfläche und den gegebenen Stücken zu finden.

Auflösung. Die Coordinaten des beliebigen Punktes der Kugeloberfläche heißen x, y, z; so ist nach §. 22. $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, also

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Setzt man in dieser allgemeinen Gleichung der Kugel die Coordinaten des Mittelpunktes $= 0$, so erhält man für eine Kugel, die um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

§. 74. Löset man die erste Gleichung auf, so erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0,$$

diese Gleichung ist unter der allgemeinen Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Hx + 2Iy + 2Kz + L = 0$$

begriffen, und jede Gleichung dieser Form kann als die Gleichung einer Kugel angesehen werden, denn diese beiden Gleichungen sind eine und dieselbe, sobald man die Coordinaten des Mittelpunkts setzt $a = -H$, $b = -I$, $c = -K$, und den Radius der Kugel $r = \sqrt{H^2 + I^2 + K^2 - L}$. Jede Gleichung von der Form der dritten ist also die Gleichung einer Kugel.

§. 75. Der Kreis ist der Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene, also kann der Kreis bestimmt werden durch die beiden Gleichungen

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$
$$p = \xi x + \eta y + \zeta z.$$

In diesen zwei Gleichungen sind 8 constante Größen zur Bestimmung des Kreises enthalten; nimmt man aber die schneidende Ebene so an, daß sie durch den Mittelpunkt der Kugel geht, daß also $p = \xi a + \eta b + \zeta c$ und setzt $\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$, so verlieren die Gleichungen in Bezug auf den Kreis nichts an ihrer Allgemeinheit, und enthalten doch nur noch 6 Bestimmungsgrößen. In der einfachsten Form erscheinen diese Gleichungen, wenn man die zweite Gleichung mit der der Ebene XY verbindet, wo man dann erhält:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad z = 0.$$

§. 76. Die Determinanten der Tangentialebene für den Punkt der Kugelfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, sind die Determinanten des Radius für diesen Punkt, weil er senkrecht auf der Tangentialebene steht, also:

$$\xi = \frac{x - a}{r} \qquad \eta = \frac{y - b}{r} \qquad \zeta = \frac{z - c}{r}.$$

Die Entfernung der Tangentialebene vom Anfangspunkte der Coordinaten ist (nach der Gleichung $p = \xi x + \eta y + \zeta z$) gleich

$$\frac{x(x - a) + y(y - b) + z(z - c)}{r}.$$

§. 77. Wären die Determinanten der Tangentialebene, die Coordinaten des Berührungspunktes und der Radius der Kugel gegeben, so fände man nach diesen Gleichungen für die Coordinaten des Mittelpunktes die Werthe

$$a = x - \xi r \qquad b = y - \eta r \qquad c = z - \zeta r.$$

§. 78. Eine Cylinderfläche ist die, welche durch die Bewegung einer geraden Linie (Generatrice), die stets mit ihrer ersten Lage parallel bleibt, längs einer Curve (Directrice) entsteht; oder eine Fläche, die von einer Ebene, oder einer mit ihr

parallelen, in einer bestimmten Richtung nur in geraden Linien geschnitten wird, in jeder andern Richtung aber in einer Curve geschnitten wird. Die Gleichung welche zwischen den Bestimmungsgrößen der Generatrice und denen der Directrice statt findet, ist die Gleichung der Cylinderfläche.

Die Gleichung der geraden Linie ist nach §. 26., wenn man den constanten Punkt in der Ebene XY annimmt, also $c = o$ setzt,

$$x = \frac{\xi z}{\zeta} + a \qquad y = \frac{\eta z}{\zeta} + b.$$

In diesen Gleichungen ist ξ, η, ζ als constant anzusehen, da die Generatrice stets mit ihrer ersten Richtung parallel bleiben muß. Die Gleichungen der Directrice sind im Allgemeinen

$$o = F(x, y, z) \qquad o = F'(x, y, z),$$

eliminirt man aus diesen vier Gleichungen x, y, z; so erhält man eine Gleichung zwischen a, b und den Bestimmungsgrößen der Directrice von der Form $o = f(a, b)$, welches denn die Gleichung der Cylinderfläche giebt, sobald man statt a und b in den Gleichungen der Generatrice die hieraus erhaltenen Werthe setzt.

§. 79. Es sey z. B. die Directrice ein Kreis um den Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene XY beschrieben, so sind die Gleichungen dieser Directrice nach §. 75.

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad z = o,$$

die Gleichungen der Generatrice sind

$$x = \frac{\xi}{\zeta} z + a \qquad y = \frac{\eta}{\zeta} z + b.$$

Aus diesen vier Gleichungen x, y, z eliminirt giebt

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad b = \pm\sqrt{r^2 - a^2},$$

substituirt man diesen Werth in den Gleichungen der Generatrice, so erhält man statt $x = \frac{\xi(y - b)}{\eta} + a$ die Gleichung

$$\eta(x - a) = \xi(y \pm \sqrt{r^2 - a^2}),$$

welches denn die Gleichung eines Cylinders ist, dessen Grundfläche ein Kreis ist.

§. 80. Setzt man in obigen vier Gleichungen ξ und $\eta = o$, $\zeta = 1$, nimmt also die Generatrice parallel der Axe OZ an, so erhält man $x = a$, $y = b$, also

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

welches dann die Gleichung für den geraden Cylinder, dessen Axe zugleich die Axe OZ ist, wäre.

Reducirt man diese Gleichung auf ein neues Axensystem vermittelst der Gleichungen (§. 70.)

$$x' + a' = \xi x + \eta y + \zeta z$$
$$y' + b' = \xi' x + \eta' y + \zeta' z$$
$$z' + c' = \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z,$$

wo a', b', c' die Coordinaten des alten Anfangspunktes in Bezug auf das neue Axensystem sind, so ist:

$$(x' + a')^2 = \xi^2 x^2 + \eta^2 y^2 + \zeta^2 z^2 + 2\eta\zeta yz + 2\zeta\xi zx + 2\xi\eta xy$$
$$(y' + b')^2 = \xi'^2 x^2 + \eta'^2 y^2 + \zeta'^2 z^2 + 2\eta'\zeta' yz + 2\zeta'\xi' zx + 2\xi'\eta' xy$$
$$(z' + c')^2 = \xi''^2 x^2 + \eta''^2 y^2 + \zeta''^2 z^2 + 2\eta''\zeta'' yz + 2\zeta''\xi'' zx + 2\xi''\eta'' xy$$

also $(x' + a')^2 + (y' + b')^2 + (z' + c')^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$,

wo dann z nicht mehr eine beliebige Größe ist, wie in der vorigen Gleichung, sondern den Abstand des alten Anfangspunktes von einer Ebene bedeutet, die durch den Punkt (x', y', z') der Cylinderfläche perpendikular auf die Axe des Cylinders gelegt ist; nun sind aber die Determinanten der Axe des Cylinders ζ, ζ', ζ'', also ist (nach §. 42.)

$$z = \zeta(x' - a') + \zeta'(y' - b') + \zeta''(z' - c')$$

die allgemeine Gleichung der geraden Cylinderfläche mit kreisförmiger Basis, also

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = r^2 + [\zeta(x - a) + \zeta'(y - b) + \zeta''(z - c)]^2.$$

§. 81. Setzt man in dieser Gleichung $z = 0$, so erhielte man die Gleichung des Durchschnitts dieser Cylinderfläche und der Ebene XY, welcher eine Ellipse ist. Um diese Gleichung zu vereinfachen, verlege man den Anfangspunkt der Coordinaten wieder in den Punkt abc, so wird $a = b = c = 0$, also gewinnt die Gleichung die Form

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 + (\zeta x + \zeta' y)^2.$$

Noch einfacher wird die Gleichung, wenn man die Axe des Cylinders in der Ebene ZX annimmt, wodurch $\zeta' = 0$ wird; nennt man nun den Neigungswinkel der Cylinderaxe zur Ebene XY, φ, so ist $\zeta = \cos. \varphi$, also

$$x^2 + y^2 = r^2 + x^2 \cos.^2\varphi \text{ oder } x^2 \sin.^2\varphi + y^2 = r^2.$$

Nennt man jetzt statt r die kleine Axe der Ellipse b und $\frac{}{\sin.\varphi}$ oder die große Axe a, so ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die einfachste Gleichung der Ellipse.

(Wird hier $\varphi = 90^\circ$, also $\sin.\varphi = 1$, so gewinnt die Gleichung die Form $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ oder $x^2 + y^2 = r^2$, welches die Gleichung des Kreises ist.)

§. 82. Die Kegelfläche entsteht durch die Bewegung einer geraden Linie als Generatrice, die einen festen Punkt hat, längs einer Curve als Directrice. Die Gleichung der Kegelfläche würde man also erhalten, indem man die Gleichungen einer graden Linie, die den constanten Punkt a, b, c mit dem variablen x, y, z vereint, mit den allgemeinen Gleichungen einer Curve so verbindet, daß man x, y, z eliminirt, also eine Gleichung zwischen a, b, c erhält, und die daraus gefundenen Werthe in der ersten Gleichung substituirt.

§. 83. Die Gleichungen einer graden Linie sind nach §. 30.

$$x = \lambda(a' - a) + a$$
$$y = \lambda(b' - b) + b$$
$$z = \lambda(c' - c) + c$$

wo a, b, c die Coordinaten des festen Punktes der Generatrice und a′, b′, c′ die eines andern gegebenen Punktes sind (welcher in der Directrice liegt).

Statt den allgemeinen Gleichungen der Directrice

$$F(a', b', c') = 0, \quad F'(a', b', c') = 0,$$

nehme man z. B. die Gleichungen eines Kreises in der Ebene XY

$$a'^2 + b'^2 = r^2, \quad c' = 0, \text{ so ist}$$

$$\lambda = \frac{z - c}{c' - c} = \frac{c - z}{c - c'} = \frac{c - z}{c}, \text{ also ist auch}$$

$$x - a = \frac{(c - z)(a' - a)}{c}, \quad y - b = \frac{(c - z)(b' - b)}{c}$$

$$\text{also } a' = \frac{c(x - a)}{c - z} + a = \frac{cx - az}{c - z}, \text{ ebenso } b' = \frac{cy - bz}{c - z}$$

da nun $a'^2 + b'^2 = r^2$, so ist auch nach diesen Werthen von a′ und b′

$$(cx - az)^2 + (cy - bz)^2 = r^2 (c - z)^2,$$

welches die Gleichung eines Kegels ist, dessen Directrice ein Kreis in der Ebene XY, um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben, ist.

§. 84. Setzt man in dieser Gleichung $z = o$, so erhält man wieder die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$; setzt man $z = c$, so erhält man die Gleichung für den festen Punkt oder den Scheitel des Kegels

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = o.$$

Setzt man a und $b = o$, so fällt der Scheitel in die Axe OZ und man erhält die Gleichung des graden Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{c^2}(c - z)^2.$$

Nennt man hier den Winkel, welchen die Generatrice mit der Axe der z macht φ, so ist $\frac{r}{c} = tg.\varphi$, und verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Spitze des Kegels, so wird das neue z gleich dem früheren $c - z$, also heißt dann die Gleichung für den Kegel

$$x^2 + y^2 = tg.^2\varphi \,.\, z^2.$$

§. 85. Setzt man in dieser Gleichung für y eine constante Größe n, so erhält man die Gleichung für den Schnitt des Kegels durch eine Ebene, welche parallel der Axe ist, d. h. die Gleichung einer Hyperbel $x^2 + n^2 = tg.^2\varphi \,.\, z^2$ oder

$$\frac{tg.^2\varphi}{n^2} z^2 - \frac{1}{n^2} x^2 = 1.$$

Auf diese Gleichung einer Hyperbel kann jede Gleichung von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zurückgeführt werden, man setze nur $b = n$ und $\frac{b}{a} = tg.\varphi$.

Setzt man $\varphi = 45°$, also $tg.\varphi = 1$, so erhält man die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel von der Form $x^2 - y^2 = a^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

§. 86. Will man in obiger Gleichung des graden Kegels

$$x^2 + y^2 = tg.^2\varphi\, z^2$$

das Axensystem so verändern, daß die Axe der z in die Kegelfläche fällt, so geschieht dieses nach §. 70. mittelst der Gleichungen

$$\xi x + \zeta z = x'$$
$$y = y'$$
$$\xi'' x + \zeta'' z = z',$$

denn da die Axe der y unverändert geblieben ist, so ist η, ξ', ζ' und η'' gleich o und $\eta' = 1$ geworden. Hier ist nun

$$\xi = \cos.\varphi, \quad \zeta = -\sin.\varphi$$
$$\xi'' = \sin.\varphi, \quad \zeta'' = \cos.\varphi.$$

Durch die Reduction auf dieses neue Axensystem wird obige Gleichung verwandelt in

$$\xi^2 x^2 + 2\xi\zeta xz + \zeta^2 z^2 + y^2 = tg.^2\varphi\,[\xi''^2 x^2 + 2\xi''\zeta'' xz + \zeta''^2 z^2] \text{ oder}$$

$$\cos^2\varphi.x^2 + \sin^2\varphi.z^2 - 2\sin.\varphi\cos.\varphi xz + y^2 = tg.^2\varphi\sin^2\varphi.x^2 + \sin^2\varphi.z^2 + 2tg.\varphi\sin^2\varphi.xz$$

$$\text{oder } x^2 \cdot \frac{\cos.^4\varphi - \sin.^4\varphi}{\cos.^2\varphi} + y^2 = 2tg.\varphi\ xz \text{ oder}$$

$$(1 - tg.^2\varphi)\,x^2 + y^2 = 2tg.\varphi\ xz.$$

Setzt man in dieser Gleichung x gleich einer constanten Größe n, so erhält man den Schnitt der Kegelfläche durch eine Ebene, die gegen die Axe des Kegels unter dem Winkel φ geneigt ist, oder die Gleichung einer Parabel

$$n^2(1 - tg.^2\varphi) + y^2 = 2\,n\,tg.\varphi\,z.$$

Auf diese Gleichung einer Parabel läßt sich jede Gleichung von der Form

$$Ay^2 + 2Bz + C = o$$

reduciren, indem man setzt $n = \sqrt{\frac{CA + B^2}{A^2}}$ und $tg.\varphi = -\frac{BA}{\sqrt{CA + B^2}}$.

Durch Veränderung des Anfangspunktes des Coordinaten läßt sich diese Gleichung vereinfachen. Man setze nehmlich für z, $z + n\,cotg.\,2\,\varphi = z + \frac{n(1 - tg.^2\varphi)}{2\,tg.\varphi}$, oder oder man verringere z um seinen Werth für $y = o$, so erhält man $y^2 = 2\,n\,tg.\varphi\,z$. Die Größe $n\,tg.\varphi$ nennt man den Parameter und bezeichnet sie gewöhnlich durch p, daher ist die einfachste Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2pz.$$

Anmerkung. Das Nothwendigste über Ellipse, Parabel und Hyperbel ist in §. 81., 85., 86. gesagt. Es würde zu weit führen, die Theorie der Kegelschnitte hier vollständig abzuhandeln, besonders da sich dabei nichts Neues sagen ließe.

---

§. 87. Jede Gleichung zwischen drei Coordinaten ist als die Gleichung einer Fläche anzusehen, und schon früher (§. 42.) ist gezeigt, daß jede Gleichung vom ersten Grade zwischen drei veränderlichen Größen, die Gleichung einer Ebene ist. Die übrigen Flächen, die wir schon betrachtet haben, wurden alle durch Gleichungen vom zweiten Grade ausgedrückt. Im Allgemeinen nennt man jede Fläche, die durch eine Gleichung vom zweiten Grade ausgedrückt wird, eine Fläche vom zweiten Grade.

§. 88. Die allgemeinste Gleichung vom zweiten Grade zwischen drei veränderlichen Größen, die alle andern in sich begreift, ist: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy + 2Hx + 2Iy + 2Kz + L = 0$. (1) Wenn man diese Gleichung nach §. 70. auf ein andres Axensystem reducirt, welches durch folgende Gleichungen gegeben ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi x' + \xi' y' + \xi'' z' + p \\ y &= \eta x' + \eta' y' + \eta'' z' + q \\ z &= \zeta x' + \zeta' y' + \zeta'' z' + r, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

so erhält man, indem man für x, y, z die neuen Werthe substituirt:

$$\begin{array}{llllll}
Ax^2 = & x^2 A\xi^2 & + y^2 A\xi'^2 & + z^2 A\xi''^2 & + 2yz\, A\xi'\xi'' & + 2zx\, A\xi''\xi \quad + \\
By^2 = & x^2 B\eta^2 & + y^2 B\eta'^2 & + z^2 B\eta''^2 & + 2yz\, B\eta'\eta'' & + 2zx\, B\eta''\eta \quad + \\
Cz^2 = & x^2 C\zeta^2 & + y^2 C\zeta'^2 & + z^2 C\zeta''^2 & + 2yz\, C\zeta'\zeta'' & + 2zx\, C\zeta''\zeta \quad + \\
2Eyz = & x^2\, 2E\eta\zeta & + y^2\, 2E\eta'\zeta' & + z^2\, 2E\eta''\zeta'' & + 2yz\, E(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') & + 2zx\, E(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + \\
2Fzx = & x^2\, 2F\zeta\xi & + y^2\, 2F\zeta'\xi' & + z^2\, 2F\zeta''\xi' & + 2yz\, F(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') & + 2zx\, F(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + \\
2Gxy = & x^2\, 2G\xi\eta & + y^2\, 2G\xi'\eta' & + z^2\, 2G\xi''\eta'' & + 2yz\, G(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') & + 2zx\, G(\xi'\eta + \eta''\xi) +
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll}
+ 2xy\, A\xi\xi' & + 2x\, A\xi p & + 2y\, A\xi' p & + 2z\, A\xi'' p & + Ap^2 \\
+ 2xy\, B\eta\eta' & + 2x\, B\eta q & + 2y\, B\eta' q & + 2z\, B\eta'' q & + Bq^2 \\
+ 2xy\, C\zeta\zeta' & + 2x\, C\zeta r & + 2y\, C\zeta' r & + 2z\, C\zeta'' r & + Cr^2 \\
+ 2xy\, E(\eta\zeta' + \zeta'\eta) & + 2x\, E(\eta r + \zeta q) & + 2y\, E(\eta' r + \zeta' q) & + 2z\, E(\eta'' r + \zeta'' q) & + 2Eqr \\
+ 2xy\, F(\zeta\xi' + \xi\zeta') & + 2x\, F(\zeta p + \xi r) & + 2y\, F(\zeta' p + \xi' r) & + 2z\, F(\zeta'' p + \xi'' r) & + 2Frp \\
+ 2xy\, G(\xi\eta' + \eta\xi') & + 2x\, G(\xi q + \eta p) & + 2y\, G(\xi' q + \eta' p) & + 2z\, G(\xi'' q + \eta'' p) & + 2Gpq
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lllll}
2Hx = & 2x\, H\xi & + 2y\, H\xi' & + 2z\, H\xi'' & + 2Hp \\
2Iy = & 2x\, I\eta & + 2y\, I\eta' & + 2z\, I\eta'' & + 2Iq \\
2Kz = & 2x\, K\zeta & + 2y\, K\zeta' & + 2z\, K\zeta'' & + 2Kr \\
L = & & & & L.
\end{array}$$

Bezeichnet man also in der neu erhaltenen Gleichung die correspondirenden Coefficienten mit denselben Buchstaben des deutschen Alphabets, so erhält man eine Gleichung von der Form

(3) $$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{E}yz + 2\mathfrak{F}zx + 2\mathfrak{G}xy + 2\mathfrak{H}x + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L},$$

in welcher Gleichung

(4) $$\begin{cases}
\mathfrak{A} = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2E\eta\zeta + 2F\zeta\xi + 2G\xi\eta \\
\mathfrak{B} = A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 + 2E\eta'\zeta' + 2F\zeta'\xi' + 2G\xi'\eta' \\
\mathfrak{C} = A\xi''^2 + B\eta''^2 + C\zeta''^2 + 2E\eta''\zeta'' + 2F\zeta''\xi'' + 2G\xi''\eta'' \\
\mathfrak{E} = A\xi'\xi'' + B\eta'\eta'' + C\zeta'\zeta'' + E(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + F(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + G(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') \\
\mathfrak{F} = A\xi''\xi + B\eta''\eta + C\zeta''\zeta + E(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + F(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + G(\xi''\eta + \eta''\xi) \\
\mathfrak{G} = A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' + E(\eta\zeta' + \zeta\eta') + F(\zeta\xi' + \xi\zeta') + G(\xi\eta' + \eta\xi') \\
\mathfrak{H} = A\xi p + B\eta q + C\zeta r + E(\eta r + \zeta q) + F(\zeta p + \xi r) + G(\xi q + \eta p) + H\xi + I\eta + K\zeta \\
\mathfrak{J} = A\xi' p + B\eta' q + C\zeta' r + E(\eta' r + \zeta' q) + F(\zeta' p + \xi' r) + G(\xi' q + \eta' p) + H\xi' + I\eta' + K\zeta' \\
\mathfrak{K} = A\xi'' p + B\eta'' q + C\zeta'' r + E(\eta'' r + \zeta'' q) + F(\zeta'' p + \xi'' r) + G(\xi'' q + \eta'' p) + H\xi'' + I\eta'' + K\zeta''
\end{cases}$$

(5) $$\mathfrak{L} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Eqr + 2Frp + 2Gpq + 2Hp + 2Iq + 2Kr + L.$$

§. 89. Setzt man nun $BC - E^2 = A'$, $CA - F^2 = B'$, $AB - G^2 = C'$, $FG - AE = E'$, $GE - BF = F'$ und $EF - CG = G'$, ebenso $\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{G}^2 = \mathfrak{C}'$, $\mathfrak{F}\mathfrak{G} - \mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{G}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{F} - \mathfrak{C}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, so finden zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) und (3) folgende vier Bedingungsgleichungen statt:

$$\text{I.}\quad A + B + C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$$

$$\text{II.}\quad A' + B' + C' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'.$$

$$\text{III.*)}\quad AE^2 + BF^2 + CG^2 - ABC - 2EFG = \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}.$$

$$\text{IV.}\quad A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI + DL =$$
$$\mathfrak{A}'\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{J}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{J} + \mathfrak{D}\mathfrak{L}.$$

§. 90. Die Gleichung (I.) folgt aus einer einfachen Addition der drei ersten Gleichungen (4), da die Coefficienten von A, B und C jeder = 1 werden (§. 25.), und die Coefficienten von E, F, G jeder = 0 (§. 35.).

---

*) Der Kürze wegen werde diese Reihe $AE^2 + BF^2 + CG^2 - ABC - 2EFG$ durch D bezeichnet; ebenso $\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{D}$, also kann man (III.) auch kürzer ausdrücken $D = \mathfrak{D}$.

§. 91. Bezeichnet man

$$\begin{array}{lll} A\xi + G\eta + F\zeta \text{ durch } P & B\eta + E\zeta + G\xi \text{ durch } Q & C\zeta + F\xi + E\eta \text{ durch } R \\ A\xi' + G\eta' + F\zeta' \text{ durch } P' & B\eta' + F\zeta' + G\xi' \text{ durch } Q' & C\zeta' + F\xi' + E\eta' \text{ durch } R' \\ A\xi'' + G\eta'' + F\zeta'' \text{ durch } P'' & B\eta'' + E\zeta'' + G\xi'' \text{ durch } Q'' & C\zeta'' + F\xi'' + E\eta'' \text{ durch } R'' \end{array} \quad (6)$$

und substituirt diese Größen in den Werthen der Coefficienten der umgewandelten Gleichung, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = P\xi + Q\eta + R\zeta \\ \mathfrak{B} = P'\xi' + Q'\eta' + R'\zeta' \\ \mathfrak{C} = P''\xi'' + Q''\eta'' + R''\zeta'' \\ \mathfrak{E} = P'\xi'' + Q'\eta'' + R'\zeta'' = P''\xi' + Q''\eta' + R''\zeta' \\ \mathfrak{F} = P''\xi + Q''\eta + R''\zeta = P\xi'' + Q\eta'' + R\zeta'' \\ \mathfrak{G} = P\xi' + Q\eta' + R\zeta' = P'\xi + Q'\eta + R'\zeta \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{H} = Pp + Qq + Rr + H\xi + I\eta + K\zeta \\ \mathfrak{I} = P'p + Q'q + R'r + H\xi' + I\eta' + K\zeta' \\ \mathfrak{K} = P''p + Q''q + R''r + H\xi'' + I\eta'' + K\zeta'' \end{array}\right\} \quad (8)$$

Ebenfalls erhält man aus den Gleichungen (6)

$$\left.\begin{array}{l} A = P\xi + P'\xi' + P''\xi'' \\ B = Q\eta + Q'\eta' + Q''\eta'' \\ C = R\zeta + R'\zeta' + R''\zeta'' \\ E = Q\zeta + Q'\zeta' + Q''\zeta'' = R\eta + R'\eta' + R''\eta'' \\ F = R\xi + R'\xi' + R''\xi'' = P\zeta + P'\zeta' + P''\zeta'' \\ G = P\eta + P'\eta' + P''\eta'' = Q\xi + Q'\xi' + Q''\xi'' \end{array}\right\} \quad (9)$$

Setzt man statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit den Indices 0, 1, 2 und statt $\mathfrak{K}$ (Einl. alg. Vork. Nr. 2.) die Lateinischen Buchstaben, um häufige Verwirrungen zu vermeiden, so ist $K\xi = \xi^2\eta'\zeta'' + \xi\xi'\eta''\zeta + \xi\xi''\eta\zeta' - \xi\xi'\eta\zeta'' - \xi^2\eta''\zeta' - \xi\xi''\eta'\zeta$, addirt man hiezu $\eta^2\eta'\zeta'' - \eta^2\eta''\zeta' + \zeta^2\eta'\zeta'' - \zeta^2\eta''\zeta' + \zeta\zeta'\zeta''\eta + \eta\eta'\eta''\zeta$ und subtrahirt dann wieder dieselben Größen, so erhält man eine Reihe von 18 Gliedern, in welcher 1, 5, 7, 8, 9, 10 zusammen $= X$; 2, 12, 16 zusammen $= 0$; ebenso 3, 14, 11; 4, 13, 17 und 6, 18, 15; also ist:

$$K\xi = X, \text{ ebenso } K\eta = Y,\ K\zeta = Z \text{ ꝛc.}$$

folglich wenn man diese Gleichungen aufs Quadrat erhebt und addirt

$$K^2 = X^2 + X'^2 + X''^2 = (\eta^2 + \eta'^2 + \eta''^2)(\zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2) - (\eta\zeta + \eta'\zeta' + \eta''\zeta'') = 1,$$

also $K = \pm 1$; welcher von diesen beiden Werthen hier gilt, sieht man daraus, wenn man setzt

$$\xi = \eta' = \zeta'' = 1 \text{ und folglich } \xi' = \xi'' = \eta = \eta'' = \zeta = \zeta' = 0$$

und $X = +1$, also auch $K\xi = +1$, folglich

(10) $$K = +1,$$

(11) also auch $\xi = X$, $\eta = Y$, $\zeta = Z$, $\xi' = X'$, $\eta' = Y'$ ꝛc.

Setzt man jetzt

(12) $$\begin{cases} Q'R'' - R'Q'' = \mathfrak{P}, & Q''R - R''Q = \mathfrak{P}', & QR' - RQ' = \mathfrak{P}'' \\ R'P'' - P'R'' = \mathfrak{Q}, & R''P - P''R = \mathfrak{Q}', & RP' - PR' = \mathfrak{Q}'' \\ P'Q'' - Q'P'' = \mathfrak{R}, & P''Q - Q''P = \mathfrak{R}', & PQ' - QP' = \mathfrak{R}'', \end{cases}$$

so ist, wenn man für P, Q, R, P', Q', R' ꝛc. die Werthe (6) substituirt,

$$\mathfrak{P} = (BC - E^2)X + (EF - CG)Y + (EG - BF)Z = A'\xi + G'\eta + F'\zeta.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, daß

(13) $$\begin{cases} \mathfrak{P} = A'\xi + G'\eta + F'\zeta, & \mathfrak{P}' = A'\xi' + G'\eta' + F'\zeta', & \mathfrak{P}'' = A'\xi'' + G'\eta'' + F'\zeta'' \\ \mathfrak{Q} = G'\xi + B'\eta + E'\zeta, & \mathfrak{Q}' = G'\xi' + B'\eta' + E'\zeta', & \mathfrak{Q}'' = G'\xi'' + B'\eta'' + E'\zeta'' \\ \mathfrak{R} = F'\xi + E'\eta + C'\zeta, & \mathfrak{R}' = F'\xi' + E'\eta' + C'\zeta', & \mathfrak{R}'' = F'\xi'' + E'\eta'' + C'\zeta'', \end{cases}$$

daher

(14) $$\begin{cases} A' = \mathfrak{P}\xi + \mathfrak{P}'\xi' + \mathfrak{P}''\xi'' \\ B' = \mathfrak{Q}\eta + \mathfrak{Q}'\eta' + \mathfrak{Q}''\eta'' \\ C' = \mathfrak{R}\zeta + \mathfrak{R}'\zeta' + \mathfrak{R}''\zeta'' \\ E' = \mathfrak{Q}\zeta + \mathfrak{Q}'\zeta' + \mathfrak{Q}''\zeta'' = \mathfrak{R}\eta + \mathfrak{R}'\eta' + \mathfrak{R}''\eta'' \\ F' = \mathfrak{R}\xi + \mathfrak{R}'\xi' + \mathfrak{R}''\xi'' = \mathfrak{P}\zeta + \mathfrak{P}'\zeta' + \mathfrak{P}'\zeta'' \\ G' = \mathfrak{P}\eta + \mathfrak{P}'\eta' + \mathfrak{P}''\eta'' = \mathfrak{Q}\xi + \mathfrak{Q}'\xi' + \mathfrak{Q}''\xi''. \end{cases}$$

Nach (7) ist $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = P'P''\xi'\xi'' + Q'Q''\eta'\eta'' + R'R''\zeta'\zeta'' + Q'R''\eta'\zeta'' + R'Q''\zeta'\eta''$
$+ R'P''\zeta'\xi'' + P'R''\xi'\zeta'' + P'Q''\xi'\eta'' + Q'P''\eta'\xi''$

und $\mathfrak{E}^2 = P'P''\xi'\xi'' + Q'Q''\eta'\eta'' + R'R''\zeta'\zeta'' + Q'R''\zeta'\eta'' + R'Q''\eta'\zeta'' + R'P''\xi'\zeta''$
$+ P'R''\zeta'\xi'' + P'Q''\eta'\xi'' + Q'P''\xi'\eta''$,

also $\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{A}' = (Q'R'' - R'Q'')X + (R'P'' - P'R'')Y + (P'Q'' - Q'P'')Z$
$= \mathfrak{P}\xi + \mathfrak{Q}\eta + \mathfrak{R}\zeta$,

(15) ebenso findet man, daß $\mathfrak{B}' = \mathfrak{P}'\xi' + \mathfrak{Q}'\eta' + \mathfrak{R}'\zeta'$

$$\begin{cases} \mathfrak{C}' = \mathfrak{P}''\xi'' + \mathfrak{Q}''\eta'' + \mathfrak{R}''\zeta'' \\ \mathfrak{E}' = \mathfrak{P}'\xi'' + \mathfrak{Q}'\eta'' + \mathfrak{R}'\zeta'' = \mathfrak{P}''\xi' + \mathfrak{Q}''\eta' + \mathfrak{R}''\zeta' \\ \mathfrak{F}' = \mathfrak{P}''\xi + \mathfrak{Q}''\eta + \mathfrak{R}''\zeta = \mathfrak{P}\xi'' + \mathfrak{Q}\eta'' + \mathfrak{R}\zeta'' \\ \mathfrak{G}' = \mathfrak{P}\xi' + \mathfrak{Q}\eta' + \mathfrak{R}\zeta' = \mathfrak{P}'\xi + \mathfrak{Q}'\eta + \mathfrak{R}'\zeta \end{cases}$$

Die Gleichung (II) folgt aus (14) und (15), denn

$$A' + B' + C' = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' \qquad \text{(II)}$$

§. 92. $D = ABC + 2EFG - AE^2 - BF^2 - CG^2 = AA' + GG' + FF'$

nach (9) und (14) ist

$$AA' = P\mathfrak{P}\xi^2 + P'\mathfrak{P}'\xi'^2 + P''\mathfrak{P}''\xi''^2 + \xi'\xi''(P'\mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}'P'') + \xi''\xi(P''\mathfrak{P} + \mathfrak{P}''P) + \xi\xi'(P\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}P')$$

$$GG' = Q\mathfrak{Q}\xi^2 + Q'\mathfrak{Q}'\xi'^2 + Q''\mathfrak{Q}''\xi''^2 + \xi'\xi''(Q'\mathfrak{Q}'' + \mathfrak{Q}'Q'') + \xi''\xi(Q''\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}''Q) + \xi\xi'(Q\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}Q')$$

$$FF' = R\mathfrak{R}\xi^2 + R'\mathfrak{R}'\xi'^2 + R''\mathfrak{R}''\xi''^2 + \xi'\xi''(R'\mathfrak{R}'' + \mathfrak{R}'R'') + \xi''\xi(R''\mathfrak{R} + \mathfrak{R}''R) + \xi\xi'(R\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}R')$$

nun ist aber nach (12)

$$P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} = P'\mathfrak{P}' + Q'\mathfrak{Q}' + R'\mathfrak{R}' = P''\mathfrak{P}'' + Q''\mathfrak{Q}'' + R''\mathfrak{R}''$$

$$P'\mathfrak{P}'' + Q'\mathfrak{Q}'' + R'\mathfrak{R}'' = 0 \quad \mathfrak{P}'P'' + \mathfrak{Q}'Q'' + \mathfrak{R}'R'' = 0 \text{ etc.}$$

also $D = (P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R})\,(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2) = P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R}$ (16)

Ebenso ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{G}\mathfrak{G}' + \mathfrak{F}\mathfrak{F}'$

nach (7) und (15) ist aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = P\mathfrak{P}\xi^2 + Q\mathfrak{Q}\eta^2 + R\mathfrak{R}\zeta^2 + \eta\zeta(Q\mathfrak{R} + R\mathfrak{Q}) + \zeta\xi(R\mathfrak{P} + P\mathfrak{R}) + \xi\eta(P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P})$$

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}' = P'\mathfrak{P}'\xi^2 + Q'\mathfrak{Q}'\eta^2 + R'\mathfrak{R}'\zeta^2 + \eta\zeta(Q'\mathfrak{R}' + R'\mathfrak{Q}') + \zeta\xi(R'\mathfrak{P}' + P'\mathfrak{R}') + \xi\eta(P'\mathfrak{Q}' + Q'\mathfrak{P}')$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}' = P''\mathfrak{P}''\xi^2 + Q''\mathfrak{Q}''\eta^2 + R''\mathfrak{R}''\zeta^2 + \eta\zeta(Q''\mathfrak{R}'' + R''\mathfrak{Q}'') + \zeta\xi(R''\mathfrak{P}'' + P''\mathfrak{R}'') + \xi\eta(P''\mathfrak{Q}'' + Q''\mathfrak{P}'')$$

nun ist aber nach (12)

$$P\mathfrak{P} + P'\mathfrak{P}' + P''\mathfrak{P}'' = Q\mathfrak{Q} + Q'\mathfrak{Q}' + Q''\mathfrak{Q}'' = R\mathfrak{R} + R'\mathfrak{R}' + R''\mathfrak{R}''$$

$$Q\mathfrak{R} + Q'\mathfrak{R}' + Q''\mathfrak{R}'' = 0 \quad R\mathfrak{Q} + R'\mathfrak{Q}' + R''\mathfrak{Q}'' = 0 \text{ etc.}$$

also $\mathfrak{D} = (P\mathfrak{P} + P'\mathfrak{P}' + P''\mathfrak{P}'')\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = P\mathfrak{P} + P'\mathfrak{P}' + P''\mathfrak{P}''$ (17)

nach (12) ist aber $P\mathfrak{P} + Q\mathfrak{Q} + R\mathfrak{R} = P\mathfrak{P} + P'\mathfrak{P}' + P''\mathfrak{P}''$

also, (16) und (17), $D = \mathfrak{D}$ welches die III. zu beweisende Bedingungs- (III) gleichung ist.

---

§. 93. Setzt man

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{H}\xi + \mathfrak{I}\xi' + \mathfrak{K}\xi'' = \mathfrak{H}' \\ \mathfrak{H}\eta + \mathfrak{I}\eta' + \mathfrak{K}\eta'' = \mathfrak{I}' \text{ und } \mathfrak{H}\zeta + \mathfrak{I}\zeta' + \mathfrak{K}\zeta'' = \mathfrak{K}' \end{array}\right\} \qquad (18)$$

so ist nach (8) und (9)

$$\mathfrak{H}' = Ap + Gq + Fr + H$$

$$\mathfrak{I}' = Gp + Bq + Er + I$$

$$\mathfrak{K}' = Fp + Eq + Cr + K$$

folglich

$$A'\mathfrak{H}' = A'Ap + A'Gq + A'Fr + A'H$$

$$G'\mathfrak{I}' = G'Gp + G'Bq + G'Er + G'I$$

$$F'\mathfrak{K}' = F'Fp + F'Eq + F'Cr + F'K$$

nun ist aber $A'G + G'B + F'E = 0 = A'F + G'E + F'C$

also $A'\mathfrak{H}' + G'\mathfrak{I}' + F'\mathfrak{K}' = p(A'A + G'G + F'F) + A'H + G'I + F'K$

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{rl} \text{also } pD &= A'\mathfrak{H}' + G'\mathfrak{I}' + F'\mathfrak{K}' - [A'H + G'I + F'K] \\ \text{ebenso } qD &= G'\mathfrak{H}' + B'\mathfrak{I}' + E'\mathfrak{K}' - [G'H + B'I + E'K] \\ rD &= F'\mathfrak{H}' + E'\mathfrak{I}' + C'\mathfrak{K}' - [F'H + E'I + C'K] \end{array}\right.$$

Nach (5) ist

$$L - \mathfrak{L} = p(Ap + Gq + Fr + 2H) + q(Gp + Bq + Er + 2I) + r(Fp + Eq + Cr + 2K)$$

also nach (18) $L - \mathfrak{L} = p(\mathfrak{H}' + H) + q(\mathfrak{I}' + I) + r(\mathfrak{K}' + K)$

(20) und nach (19) $D(L-\mathfrak{L}) = A'\mathfrak{H}'^2 + B'\mathfrak{I}'^2 + C'\mathfrak{K}'^2 + 2E'\mathfrak{I}'\mathfrak{K}' + 2F'\mathfrak{K}'\mathfrak{H}' + 2G'\mathfrak{H}'\mathfrak{I}'$
$- [A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI]$

Substituirt man nun in den Gleichungen (15) für $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ ꝛc. die Werthe (13), so erhält man

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= A'\xi^2 + B'\eta^2 + C'\zeta^2 + 2E'\eta\zeta + 2F'\zeta\xi + 2G'\xi\eta \\
\mathfrak{B}' &= A'\xi'^2 + B'\eta'^2 + C'\zeta'^2 + 2E'\eta'\zeta' + 2F'\zeta'\xi' + 2G'\xi'\eta' \\
\mathfrak{C}' &= A'\xi''^2 + B'\eta''^2 + C'\zeta''^2 + 2E'\eta''\zeta'' + 2F'\zeta''\xi'' + 2G'\xi''\eta'' \\
\mathfrak{E}' &= A'\xi'\xi'' + B'\eta'\eta'' + C'\zeta'\zeta'' + E'(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + F'(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + G'(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') \\
\mathfrak{F}' &= A'\xi''\xi + B'\eta''\eta + C'\zeta''\zeta + E'(\eta''\zeta + \zeta''\eta) + F'(\zeta''\xi + \xi''\zeta) + G'(\xi''\eta + \eta''\xi) \\
\mathfrak{G}' &= A'\xi\xi' + B'\eta\eta' + C'\zeta\zeta' + E'(\eta\zeta' + \zeta\eta') + F'(\zeta\xi' + \xi\zeta') + G'(\xi\eta' + \eta\xi')
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt in den sechs positiven Größen der Gleichung (20) für $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{K}'$ die Werthe der Gleichungen (18), so erhält man

$$\begin{aligned}
A'\mathfrak{H}'^2 &= A'\mathfrak{H}^2\xi^2 + A'\mathfrak{I}^2\xi'^2 + A'\mathfrak{K}^2\xi''^2 + 2A'\mathfrak{I}\mathfrak{K}\xi'\xi'' + 2A'\mathfrak{K}\mathfrak{H}\xi''\xi + 2A'\mathfrak{H}\mathfrak{I}\xi\xi' \\
B'\mathfrak{I}'^2 &= B'\mathfrak{H}^2\eta^2 + B'\mathfrak{I}^2\eta'^2 + B'\mathfrak{K}^2\eta''^2 + 2B'\mathfrak{I}\mathfrak{K}\eta'\eta'' + 2B'\mathfrak{K}\mathfrak{H}\eta''\eta + 2B'\mathfrak{H}\mathfrak{I}\eta\eta' \\
C'\mathfrak{K}'^2 &= C'\mathfrak{H}^2\zeta^2 + C'\mathfrak{I}^2\zeta'^2 + C'\mathfrak{K}^2\zeta''^2 + 2C'\mathfrak{I}\mathfrak{K}\zeta'\zeta'' + 2C'\mathfrak{K}\mathfrak{H}\zeta''\zeta + 2C'\mathfrak{H}\mathfrak{I}\zeta\zeta' \\
2E'\mathfrak{I}'\mathfrak{K}' &= 2E'\mathfrak{H}^2\eta\zeta + 2E'\mathfrak{I}^2\eta'\zeta' + 2E'\mathfrak{K}^2\eta''\zeta'' + 2E'\mathfrak{I}\mathfrak{K}(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + 2E'\mathfrak{K}\mathfrak{H}(\eta''\zeta + \zeta''\eta) \\
&\quad + 2E'\mathfrak{H}\mathfrak{I}(\eta\zeta' + \zeta\eta') \\
2F'\mathfrak{K}'\mathfrak{H}' &= 2F'\mathfrak{H}^2\zeta\xi + 2F'\mathfrak{I}^2\zeta'\xi' + 2F'\mathfrak{K}^2\zeta''\xi'' + 2F'\mathfrak{I}\mathfrak{K}(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + 2F'\mathfrak{K}\mathfrak{H}(\zeta''\xi + \xi''\zeta) \\
&\quad + 2F'\mathfrak{H}\mathfrak{I}(\zeta\xi' + \xi\zeta') \\
2G'\mathfrak{H}'\mathfrak{I}' &= 2G'\mathfrak{H}^2\xi\eta + 2G'\mathfrak{I}^2\xi'\eta' + 2G'\mathfrak{K}^2\xi''\eta'' + 2G'\mathfrak{I}\mathfrak{K}(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') + 2G'\mathfrak{K}\mathfrak{H}(\xi''\eta + \eta''\xi) \\
&\quad + 2G'\mathfrak{H}\mathfrak{I}(\xi\eta' + \eta\xi')
\end{aligned}$$

Addirt man diese 6 Reihen zusammen, so entsprechen die 6 unter einander stehenden Größen, wenn man den gemeinschaftlichen Factor abrechnet, den 6 vorhergehenden Reihen, also ist die Summe

$$= \mathfrak{A}'\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{I}$$

folglich, wenn man diesen Werth für die Summe der 6 Größen in der Gleichung (20) supponirt und alle deutschen Buchstaben auf eine, die lateinischen auf die andere Seite schafft, so ist:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}'\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}'\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}'\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}'\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{I} - \mathfrak{D}\mathfrak{L}$$
$$= A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI - DL \qquad \text{(IV)}$$

welches die IV. zu beweisende Bedingungsgleichung ist.

---

§. 94. Nimmt man das neue Axensystem so an, daß es mit dem ersten einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt hat, so wird $p = q = r = 0$; da p, q, r die Coordinaten des alten Anfangspunktes in Bezug auf das neue Axensystem darstellen (§. .). Alsdann ist nach (8)

$$\mathfrak{H} = H\xi + I\eta + K\zeta, \quad \mathfrak{I} = H\xi' + I\eta' + K\zeta', \quad \mathfrak{K} = H\xi'' + I\eta'' + K\zeta''$$
$$\text{also ist } \mathfrak{H}^2 + \mathfrak{I}^2 + \mathfrak{K}^2 = H^2 + I^2 + K^2 \qquad \text{(V)}$$

Aus den 3 letzten Gleichungen folgt, daß

$$H = \mathfrak{H}\xi + \mathfrak{I}\xi' + \mathfrak{K}\xi'', \quad I = \mathfrak{H}\eta + \mathfrak{I}\eta' + \mathfrak{K}\eta'', \quad K = \mathfrak{H}\zeta + \mathfrak{I}\zeta' + \mathfrak{K}\zeta''$$

folglich ist

$$AH^2 = \mathfrak{H}^2A\xi^2 + \mathfrak{I}^2A\xi'^2 + \mathfrak{K}^2A\xi''^2 + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}A\xi'\xi'' + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}A\xi''\xi + 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}A\xi\xi'$$
$$BI^2 = \mathfrak{H}^2B\eta^2 + \mathfrak{I}^2B\eta'^2 + \mathfrak{K}^2B\eta''^2 + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}B\eta'\eta'' + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}B\eta''\eta + 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}B\eta\eta'$$
$$CK^2 = \mathfrak{H}^2C\zeta^2 + \mathfrak{I}^2C\zeta'^2 + \mathfrak{K}^2C\zeta''^2 + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}C\zeta'\zeta'' + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}C\zeta''\zeta + 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}C\zeta\zeta'$$
$$2EIK = 2\mathfrak{H}^2E\eta\zeta + 2\mathfrak{I}^2E\eta'\zeta' + 2\mathfrak{K}^2E\eta''\zeta'' + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}E(\eta'\zeta'' + \zeta'\eta'') + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}E(\eta''\zeta + \zeta''\eta)$$
$$+ 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}E(\eta\zeta' + \zeta\eta')$$
$$2FKH = 2\mathfrak{H}^2F\zeta\xi + 2\mathfrak{I}^2F\zeta'\xi' + 2\mathfrak{K}^2F\zeta''\xi'' + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}F(\zeta'\xi'' + \xi'\zeta'') + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}F(\zeta''\xi + \xi''\zeta)$$
$$+ 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}F(\zeta\xi' + \xi\zeta')$$
$$2GHI = 2\mathfrak{H}^2G\xi\eta + 2\mathfrak{I}^2G\xi'\eta' + 2\mathfrak{K}^2G\xi''\eta'' + 2\mathfrak{I}\mathfrak{K}G(\xi'\eta'' + \eta'\xi'') + 2\mathfrak{K}\mathfrak{H}G(\xi''\eta + \eta''\xi)$$
$$+ 2\mathfrak{H}\mathfrak{I}G(\xi\eta' + \eta\xi')$$

Die unter einander stehenden 6 Glieder dieser Reihen entsprechen nach (4) den Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, also wenn man diese 6 Reihen zusammen addirt, erhält man

$$AH^2 + BI^2 + CK^2 + 2EIK + 2FKH + 2GHI$$
$$= \mathfrak{A}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{K}^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{I}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{F}\mathfrak{K}\mathfrak{H} + 2\mathfrak{G}\mathfrak{H}\mathfrak{I} \qquad \text{(VI)}$$

§. 95. Da in diesem Falle auch $\mathfrak{L} = L$ wird (5), so hat man zur Bestimmung der 9 Coefficienten der umgewandelten Gleichung 6 Bedingungsgleichungen; nimmt

man also 3 willkührlich an, so kann man die übrigen 6 daraus bestimmen. Nimmt man z. B. an $\mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \mathfrak{G} = 0$, so würden die 6 Bedingungsgleichungen folgende Gestalt annehmen:

I. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A + B + C$

II. $\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} = A' + B' + C'$

III. $-\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = AE^2 + BF^2 + CG^2 - ABC - 2EFG$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = -D$

IV. $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{K}^2 = A'H^2 + B'I^2 + C'K^2 + 2E'IK + 2F'KH + 2G'HI$

V. $\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{I}^2 + \mathfrak{K}^2 = H^2 + I^2 + K^2$

VI. $\mathfrak{A}\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{I}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{K}^2 = AH^2 + BI^2 + CK^2 + 2EIK + 2FKH + 2GHI$

---

§. 96. Aus den 3 ersten Gleichungen folgt, daß $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die 3 Wurzeln der cubischen Gleichung

(21) $$t^3 - (A + B + C)\,t^2 + (A' + B' + C')\,t + D = 0$$

sind, deren eine auf jeden Fall eine reelle Größe seyn muß. Angenommen $\mathfrak{A}$ sey diese reelle Wurzel, so dividire man obige Gleichung (21) durch $t - \mathfrak{A}$; dazu substituire man für die 3 Coefficienten ihren Werth (nach I, II und III), wodurch man erhält:

$$t^3 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})\,t^2 + (\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,t - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$$

dividirt man jetzt durch $t - \mathfrak{A}$, so erhält man:

$$t^2 - (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\,t + \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0, \quad \text{oder } t^2 - 2mt + n$$

in welcher Gleichung die Coefficienten

(22) $$\begin{cases} 2m = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \\ n = \mathfrak{B}\mathfrak{C} \end{cases}$$

ebenfalls noch reelle Größen seyn müssen.

Setzt man jetzt in der Gleichung (21) für A', B', C', $\mathfrak{D}$ und D ihre Werthe, so erhält man

$$t^3 - (A+B+C)t^2 + (BC + CA + AB - E^2 - F^2 - G^2)t + AE^2 + BF^2 + CG^2 - ABC - 2EFG = 0$$

welches man ausdrücken kann durch

$$(t-A)(t-B)(t-C) - E^2(t-A) - F^2(t-B) - G^2(t-C) - 2EFG = 0$$

woraus folgt, daß $t - A = \dfrac{F^2(t-B) + G^2(t-C) + 2EFG}{(t-B)(t-C) - E^2}$

welches für alle Werthe von t noch gültig ist, also auch für die Werthe $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, folglich ist

$$\mathfrak{B} - A = \frac{F^2(\mathfrak{B}-B) + G^2(\mathfrak{B}-C) + 2EFG}{(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2}$$

$$\mathfrak{C} - A = \frac{F^2(\mathfrak{C}-B) + G^2(\mathfrak{C}-C) + 2EFG}{(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2}$$

Zieht man die zweite dieser Gleichungen von der ersten ab, so erhält man

$$\mathfrak{B}-\mathfrak{C} = \frac{\begin{array}{r} F^2(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) + G^2(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) + 2EFG(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) \\ - E^2[F^2(\mathfrak{B}-B) + G^2(\mathfrak{B}-C) + 2EFG] \end{array}}{[(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2].[(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2]}$$

$$- \frac{\begin{array}{r} F^2(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) + G^2(\mathfrak{C}-C)(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) + 2EFG(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) \\ - E^2[F^2(\mathfrak{C}-B) + G^2(\mathfrak{C}-C) + 2EFG] \end{array}}{[(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2].[(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2]}$$

$$= \frac{\begin{array}{r} F^2(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-\mathfrak{B}) + G^2(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C)(\mathfrak{C}-\mathfrak{B}) + 2EFG[\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{B}^2 - (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(B+C)] \\ - E^2[F^2(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) + G^2(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})] \end{array}}{[(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2].[(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2]}$$

dividirt man diese Gleichung durch $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$, so erhält man

$$-1 = \frac{F^2(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B) + G^2(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C) + 2EFG(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-B-C) + E^2(F^2+G^2)}{[(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{B}-C) - E^2].[(\mathfrak{C}-B)(\mathfrak{C}-C) - E^2]} \quad (23)$$

Löset man im Zähler dieses Bruches alle Parenthesen auf, so erhält man:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}(F^2+G^2) + (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})(EFG - BF^2) + G^2E^2 + B^2F^2 - 2BEFG + (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})(EFG - CG^2)$$
$$+ E^2F^2 + G^2C^2 - 2CEFG$$

diese Reihe läßt sich aber ausdrücken durch:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}(F^2+G^2) + \left(GE - BF + F\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2}\right)^2 + \left(EF - CG + G\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{2}\right)^2 (F^2+G^2)$$

substituirt man hier die Werthe der Gleichung (22), so erhält man

$$(F' + mF)^2 + (G' + mG)^2 + (F^2 + G^2)(n - m^2) \quad (24)$$

Der Nenner der Gleichung (23) läßt sich ausdrücken durch

$$[\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B}(B+C) + A'] [\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}(B+C) + A']$$

Multiplicirt man die beiden Parenthesen, so erhält man

$$\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{C}(B+C)^2 + A'^2 - (B+C)(\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{B}^2) + A'(\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2) - A'(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})(B+C)$$

substituirt man hier die Werthe der Gleichungen (22), so erhält man

$$n^2 + n(B+C)^2 + A'^2 - 2nm(B+C) + A'(4m^2 - 2n) - 2A'm(B+C)$$
$$= n^2 + A'^2 - 2nm(B+C) - 2A'm(B+C) + 2A'n + (BC - E^2)(4m^2 - 4n) + n(B+C)^2 \quad (25)$$

Die beiden letzten Glieder dieser Reihe lassen sich verwandeln in

$$m^2(B+C)^2 - m^2(B-C)^2 + n(B-C)^2 + 4E^2n - 4E^2m^2$$

nun ist aber

$$n^2 + A'^2 + m^2(B+C)^2 - 2A'm(B+C) - 2nm(B+C) + 2A'n = [n + A' - m(B+C)]^2$$

also die Gleichung (25) $= [n + A' - m(B+C)]^2 + [(B-C)^2 + 4E^2](n - m^2)$

also (23) u. (24) $-1 = \dfrac{(F'+mF)^2 + (G'+mG)^2 + (F^2+G^2)(n-m^2)}{[n + A' - m(B+C)]^2 + [(B-C)^2 + 4E^2](n-m^2)}$

In dieser Gleichung sind aber alle Größen positiv, wenn $n - m^2$ positiv ist; da aber der ganze Bruch $= -1$ ist, so muß also $n - m^2$ negativ oder $m^2 - n$ positiv seyn.

Die beiden Wurzeln der Gleichung $t^2 - 2mt + n = 0$ oder die Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind aber $= m \pm \sqrt{m^2 - n}$; da nun $m^2 - n$ positiv ist, so haben beide Wurzeln dieser Gleichung, folglich alle drei Wurzeln der Gleichung (21) oder die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ reelle Werthe.

Hat man erst $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gefunden, so ergeben sich $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ aus den Gleichungen IV, V, VI (§. 95.), folglich läßt sich jede Gleichung von der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy + 2Hx + 2Iy + 2Kz + L = 0$$

durch eine Transformation des Axensystems, mit Beibehaltung des Mittelpuncts, verwandeln in eine Gleichung von der Form

(26) $$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0$$

---

§. 97. Setzt man jetzt statt x, y, z in der letzten Gleichung $x + a$, $y + b$ und $z + c$, verlegt also den Mittelpunkt des Axensystems, so erhält man

(27) $$\begin{cases} \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2x(\mathfrak{H}+\mathfrak{A}a) + 2y(\mathfrak{J}+\mathfrak{B}b) + 2z(\mathfrak{K}+\mathfrak{C}c) + \\ \mathfrak{A}a^2 + \mathfrak{B}b^2 + \mathfrak{C}c^2 + 2\mathfrak{H}a \qquad + 2\mathfrak{J}b \qquad + 2\mathfrak{K}c + \mathfrak{L} = 0 \end{cases}$$

also eine Gleichung von derselben Form. Setzt man in dieser Gleichung

$$a = -\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}} \qquad b = -\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{B}} \qquad c = -\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{C}}$$

so werden die Coefficienten von x, y, z alle gleich 0 und man erhält eine Gleichung von der Form

(28) $$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$$

in welcher $\mathfrak{L} = \mathfrak{L} - \left(\dfrac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{A}} + \dfrac{\mathfrak{J}^2}{\mathfrak{B}} + \dfrac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{C}}\right)$ wenn man für a, b, c die angenommenen Werthe substituirt.

---

§. 98. Diese Transformation wird unmöglich, sobald einer der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in der Gleichung (26) gleich 0 war; angenommen $\mathfrak{A}$ sey $= 0$, so erhält (27) die Form

$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x + 2y(\mathfrak{J} + \mathfrak{B}b) + 2z(\mathfrak{K} + \mathfrak{C}c) + \mathfrak{B}b^2 + \mathfrak{C}c^2 + 2\mathfrak{H}a + 2\mathfrak{J}b + 2\mathfrak{K}c + \mathfrak{L} = 0.$

Setzt man jetzt $a = -\frac{\mathfrak{B}b^2 + \mathfrak{C}c^2 + 2\mathfrak{J}b + 2\mathfrak{K}c + \mathfrak{L}}{2\mathfrak{H}}$, $b = -\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{B}}$, $c = -\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{C}}$, so werden die Coefficienten von y und z, so wie die Summe der von x, y, z unabhängigen Größen, alle gleich 0, und man erhält eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0 \qquad (29)$$

§. 99. Würde einer der drei andern Coefficienten in der Gleichung (26) bei der Transformation $= 0$, z. B. H, so ließe sich die Gleichung dennoch unter die Form (28) bringen, indem man setzt $a = 0$.

§. 100. Wenn zwei Coefficienten auf einmal $= 0$ werden, so sind verschiedene Fälle möglich: 1) wenn 2 der drei ersten Coefficienten z. B. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, 2) wenn einer der 3 ersten und der correspondirende der 3 andern z. B. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$, 3) wenn einer der 3 ersten und ein nicht correspondirender der 3 andern z. B. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}$, und 4) wenn 2 Coefficienten der Größen der ersten Potenz z. B. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K} = 0$ werden.

Im ersten Falle erhielte man die Gleichung

$$\mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0 \qquad (30)$$

Im zweiten Falle erhielte man die Gleichung von derselben Form für zwei veränderliche Größen

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0 \qquad (31)$$

Der dritte Fall läßt sich auf die Gleichung (29), wie der vierte auf die Gleichung (28) reduciren; folglich läßt sich jede Gleichung vom zweiten Grade zwischen 3 veränderlichen Größen durch Verwandlung des Axensystems auf eine der vier Gleichungen reduciren:

(28) $\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$

(29) $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0$

(30) $\mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0$

(31) $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0$

§. 101. Betrachten wir zuerst die Gleichung (31), welche nur zwei veränderliche Größen enthält, so ist es klar, daß sie eine Cylinderfläche giebt, deren Generatrice parallel mit der Axe der x ist; denn man mag für x einen constanten Werth setzen, welchen man wolle, also die durch die Gleichung (31) repräsentirte Fläche wo man wolle durch eine Ebene parallel YZ schneiden, so bleibt der Durchschnitt

derselbe und parallel mit dem früheren. Dieser Durchschnitt kann nach den verschiedenen Werthen der Coefficienten B und C entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel seyn.

§. 102. Schneidet man die Fläche, welche durch die Gleichung (30) repräsentirt wird, wo man will durch eine Ebene, welche parallel XY ist, d. h. setzt man für z einen beliebigen constanten Werth, so erhält man eine Gleichung von der Form $\mathfrak{H}x + \mathfrak{J}y = \mathfrak{L}'$, also eine Gleichung vom ersten Grade, welche nach §. 42. die einer graden Linie ist. Da aber die Determinanten dieser Linie $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ und o für alle Durchschnitte dieselben bleiben, so sind auch alle diese graden Linien parallel, folglich ist die Fläche eine Cylinderfläche, deren Generatrice (da $\zeta = 0$) mit der Ebene XY parallel geht. Um die Natur der Directrice zu erkennen, setze man x oder y gleich einer constanten, z. B. $x = 0$, so ist

$$\mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{J}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{L} = 0$$

die Gleichung einer Parabel. Also ist die Gleichung (30) die eines Cylinders, dessen Directrice eine Parabel, und (31) die eines Cylinders, dessen Directrice eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem B und C gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Alle Flächen vom zweiten Grade, welche nicht Cylinderflächen sind, sind also in den beiden Gleichungen (28) und (29) enthalten.

§. 103. Die Gleichung (28) bleibt dieselbe, wenn man für $+x$, $+y$, $+z$ setzt $-x$, $-y$, $-z$, daher ist der Mittelpunkt des Axensystems zugleich der Mittelpunkt der Fläche, welche durch die Gleichung (28) repräsentirt wird; d. h. wenn man durch den Mittelpunkt eine Linie legt und sie nach beiden Seiten bis an die Fläche verlängert, so sind beide Theile der Linie einander gleich.

§. 104. Da aber jede der drei Coordinaten zwei Werthe, einen positiven und einen negativen hat, sobald man den beiden andern einen beliebigen (möglichen) constanten Werth giebt, so theilt jede der drei Hauptebenen alle Sehnen die ihr perpendikular sind in die Hälfte; also theilt sie auch die ganze Fläche in die Hälfte.

§. 105. Die Gleichung (29) stellt keine Fläche dar, welche einen Mittelpunkt hätte, da die Coordinate x in ihr in der ersten Potenz enthalten ist; eben so wenig theilt die Ebene YZ die auf ihr senkrechten Sehnen in die Hälfte, sondern nur die Ebenen ZX und XY.

§. 106. Um die Natur der Fläche zu untersuchen, welche durch die Gleichung (28) dargestellt wird, setze man nach einander x, y, z constant, wodurch man die

Durchschnittslinie einer Ebene, die parallel mit den Hauptebenen ist, mit dieser Fläche erhält. Die Form dieser Durchschnitte hängt ab von der Positivität oder Negativität der Coefficienten. Setzt man also:

1) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ positiv,

so kann $\mathfrak{L}$ negativ gleich 0 oder positiv seyn. Ist $\mathfrak{L}$ negativ, so gewinnt die Gleichung die Form

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{L}$$

Setzt man jetzt

$$x = \alpha \text{ so erhält man } \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{L} - \mathfrak{A}\alpha^2$$
$$y = \beta \text{ so erhält man } \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{L} - \mathfrak{B}\beta^2$$
$$z = \gamma \text{ so erhält man } \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 = \mathfrak{L} - \mathfrak{C}\gamma^2$$

folglich giebt diese Fläche in der Richtung der Hauptebenen geschnitten jedes Mal eine Ellipse (ist also eine geschlossene Fläche) und heißt deshalb ein Ellipsoid.

Die Axen der Ellipsen sind $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{A}\alpha^2}{\mathfrak{B}}}$, $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{A}\alpha^2}{\mathfrak{C}}}$ rc. Setzt man $\alpha^2 > \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}$ $\beta^2 > \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}$, $\gamma^2 > \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}$, so werden diese Ellipsen imaginär; setzt man hingegen $\alpha^2 = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}$, $\beta^2 = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}$, $\gamma^2 = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}$, so werden die Ellipsen Punkte. Setzt man α, β, γ $= 0$, so erhält man die größten Ellipsen, deren Diameter $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$, $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$ zugleich die Axen des Ellipsoids sind; bezeichnet man sie durch 2A, 2B und 2C, so erhält die Gleichung des Ellipsoids durch die 3 Hauptaxen ausgedrückt die Form

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad \text{oder}$$

$$B^2C^2 + C^2A^2 + A^2B^2 = A^2B^2C^2$$

welche mit der Gleichung der Ellipse §. 81. wie auch mit der Ebene §. 52. correspondirt.

§. 107. Wird in dieser Gleichung $B = C$, so ist der eine Durchschnitt nicht mehr eine Ellipse, sondern ein Kreis und man erhält das Ellipsoid durch Umdrehung (Ellipsoide par revolution). Werden alle drei Coefficienten einander gleich, also $A = B = C$, so erhält man die Gleichung einer Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ (§. 73.)}$$

deren Radius $A = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$ ist.

§. 108. Wenn $\mathfrak{L} = 0$, so hat die Gleichung nur in dem einzigen Falle einen Sinn, daß x, y und z auch gleich 0 sind, also gilt diese Gleichung nur für den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 109. Wenn $\mathfrak{L}$ eine positive Größe ist, so hat die ganze Gleichung keinen Sinn, da dann x^2 oder y^2 oder z^2 negativ seyn müßte.

2) $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ positiv, $\mathfrak{A}$ negativ.

§. 110. Wenn hier $\mathfrak{L}$ positiv ist und man setzt (wie §. 106.)

$x = \alpha$ so erhält man $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{A}\alpha^2 - \mathfrak{L}$

$y = \beta$ so erhält man $\mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{L}$

$z = \gamma$ so erhält man $\mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{B}y^2 = \mathfrak{C}\gamma^2 + \mathfrak{L}$

Die Durchschnitte parallel der Ebene YZ sind also Ellipsen, die beiden andern aber sind Hyperbeln. Setzt man $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$, so wird die Ellipse zu einem Punkte; alle Werthe von α zwischen diesem positiven und diesem negativen Werthe machen die erste Gleichung unmöglich, also besteht die Fläche, welche dadurch repräsentirt wird, aus 2 unzusammenhängenden Stücken, und zwischen den beiden parallelen Ebenen $x = +\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$ und $x = -\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$ befindet sich kein Theil dieser Fläche. Nach dieser Eigenschaft und weil 2 Durchschnitte derselben Hyperbeln sind, hat sie den Namen Hyperboloide à deux nappes erhalten. Der kleinste Abstand der beiden Theile des Hyperboloids ist wie schon gezeigt $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$. Der Durchschnitt $x = 0$ hat keinen Sinn, aber

$y = 0$ giebt $\mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{L}$

$z = 0$ giebt $\mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{B}y^2 = \mathfrak{L}$

die Axen der ersten Hyperbel sind also $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$, die Axen der zweiten Hyperbel sind $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}}$.

§. 111. Wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ wird, so wird die Ellipse zum Kreis und beide Hyperbeln werden einander gleich. Die Fläche ist dann (wie in §. 107.) eine Fläche durch Umdrehung entstanden (Hyperboloide à deux nappes par revolution).

§. 112. Wenn $\mathfrak{L} = 0$ ist, so erhalten die 3 Durchschnitte die Gleichungen

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = 0$$
$$\mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{C}z^2$$
$$\mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{B}y^2$$

Die Fläche besteht dann also nicht mehr aus 2 unzusammenhängenden Stücken, und an die Stelle der Hyperbeln sind grade Linien getreten, also ist die ganze Fläche eine Kegelfläche mit elliptischer oder kreisförmiger Basis, je nachdem $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ungleich oder gleich sind.

§. 113. Wenn $\mathfrak{L}$ negativ ist, so erhält man für die 3 Durchschnitte, indem man setzt:

$$x = \alpha \quad — \quad — \quad \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{L}$$
$$y = \beta \quad — \quad — \quad \mathfrak{C}z^2 - \mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{L} - \mathfrak{B}\beta^2$$
$$z = \gamma \quad — \quad — \quad \mathfrak{A}x^2 - \mathfrak{B}y^2 = \mathfrak{C}\gamma^2 - \mathfrak{L}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt für jeden Werth von α eine Ellipse; die beiden andern geben Hyperbeln. Da diese Fläche mit der vorigen das gemein hat, daß 2 Durchschnitte Hyperbeln sind, der dritte eine Ellypse, aber sich dadurch unterscheidet daß sie durchaus zusammenhängend ist, während jene aus 2 Stücken bestand, so nennt man sie Hyperboloide à une nappe. Die 3 Hauptdurchschnitte sind:

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = \mathfrak{L}$$
$$\mathfrak{C}z^2 - \mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{L}$$
$$\mathfrak{B}y^2 - \mathfrak{A}x^2 = \mathfrak{L}$$

Die Axen der Ellipse sind $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$; die Axen der ersten Hyperbel sind $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{C}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$; die Axen der zweiten Hyperbel sind $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{B}}}$ und $2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}}}$

§. 114. Wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ wird, so erhält man wieder eine durch Umwälzung entstandene Fläche (Hyperboloide à une nappe par revolution).

§. 115. Alle übrigen Fälle die durch die Positivität und Negativität der vier Coefficienten entstehen können, lassen sich dadurch, daß man alle Zeichen umkehrt, auf einen der schon angeführten zurückführen. Die Gleichung $\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{L} = 0$ enthält also: das Ellipsoid, das Hyperboloid à deux nappes und das Hyperboloid à une nappe; als Unterabtheilungen dieser 3 Flächen das Ellipsoid durch Umwälzung, die Kugel, den Punkt, das Hyperboloid à deux nappes par revolution, den Kegel mit elliptischer und mit kreisförmiger Basis, und das Hyperboloid à une nappe par revolution.

§. 116. In der Gleichung (29) $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = 0$ können erstens $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gleiche Zeichen haben und zweitens ungleiche. Angenommen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind positiv und $\mathfrak{H}$ negativ, so setze man

$x = \alpha$ und man erhält die Gleichung $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = 2\mathfrak{H}\alpha$
$y = \beta$ und man erhält die Gleichung $\mathfrak{C}z^2 = 2\mathfrak{H}x - \mathfrak{B}\beta^2$
$z = \gamma$ und man erhält die Gleichung $\mathfrak{B}y^2 = 2\mathfrak{H}x - \mathfrak{C}\gamma^2$

Die erste Gleichung ist die einer Ellipse, die für jedes positive α oder x reel ist, für $x = 0$ ein Punkt wird und für ein negatives x keinen Sinn hat.

Die beiden andern Gleichungen geben Parabeln, deren Parameter $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}}$. Beide bleiben unverändert für jeden Werth von β und γ, nur die Entfernung ihres Scheitels von der Ebene YZ wird dadurch verändert. Für $\beta = \gamma = 0$ fallen diese Scheitel in den Anfangspunkt der Coordinaten. Nach der Form dieser Durchschnitte heißt diese Fläche ein elliptisches Paraboloid (paraboloide elliptique).

§. 117. Wenn hier $\mathfrak{H}$ positiv wird, so hat der erste Durchschnitt, die Ellipse, nur einen Sinn, sobald x negativ ist; also bleibt die Fläche dieselbe, liegt nur auf der entgegengesetzten Seite der Ebene YZ. Wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist, so wird die Ellipse zum Kreise und die Parameter beider Parabeln werden gleich; man kann sich diese Fläche entstanden denken durch eine Parabel, welche sich um ihre Hauptaxe dreht und daher heißt sie Paraboloid par revolution.

§. 118. Wenn $\mathfrak{B}$ positiv, $\mathfrak{C}$ aber negativ ist, so erhält man die Durchschnitte ($\mathfrak{H}$ negativ angenommen)

für $x = \alpha$ — — $\mathfrak{B}y^2 - \mathfrak{C}z^2 = 2\mathfrak{H}\alpha$
für $y = \beta$ — — $\mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{H}x = \mathfrak{B}\beta^2$
für $z = \gamma$ — — $\mathfrak{B}y^2 = 2\mathfrak{H}x + \mathfrak{C}\gamma^2$

Die erste Gleichung ist die einer Hyperbel, welche ihre Hauptaxe wechselt, sobald x oder α aus dem Positiven ins Negative übergeht. Für $x = 0$ ist der Durchschnitt zwei grade sich schneidende Linien.

Die zweite Gleichung ist die einer Parabel, deren Parameter $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{C}}$ ist, deren Hauptaxe aber die negative Axe der x ist (so daß die Oeffnung der Parabel nach der negativen Seite der Ebene YZ hinweist). Für $\beta = 0$ hat sie ihren Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten.

Die dritte Gleichung ist ebenfalls die einer Parabel, deren Parameter $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}}$ und deren Hauptaxe die positive Axe der x ist, und deren Scheitel für $\gamma = 0$ in den Mittelpunkt fällt. Nach der Form dieser Durchschnitte heißt diese Fläche ein hyper-

bolisches Paraboloid *). Wenn hier auch $B = C$ ist, so entsteht dadurch doch keine Umwälzungsfläche, da die erste Gleichung dadurch nicht die eines Kreises, sondern die einer gleichseitigen Hyperbel wird.

§. 119. Je größer der Parameter der Parabel wird, desto mehr nähert sie sich einer graden Linie, man kann also jede grade Linie als eine Parabel von unendlich großem Parameter ansehen. Mithin kann auch jede Cylinderfläche als ein Paraboloid angesehen werden und ist nur ein specieller Fall, welcher z. B. eintritt, sobald in der letzten Gleichung $B = 0$ wäre, wodurch der Parameter der einen Parabel $\frac{H}{0}$ also unendlich groß würde.

§. 120. Alle Flächen vom zweiten Grade lassen sich also auf 5 zurückführen, welche wesentlich von einander verschieden sind:

1) das Ellipsoid (specielle Fälle sind das Ellipsoid par révolution, die Kugel);
2) das Hyperboloid à deux nappes (specielle Fälle sind das Hyperboloid à deux nappes par révolution);
3) das Hyperboloid à une nappe (specielle Fälle sind das Hyperboloid à une nappe par révolution);

   ein specieller Fall beider ist die Kegelfläche vom zweiten Grade;

4) das elliptische Paraboloid (specielle Fälle sind das Paraboloid par révolution, Cylinder mit kreisförmiger oder elliptischer Basis);
5) das hyperbolische Paraboloid (specielle Fälle sind die Cylinderfläche mit parabolischer oder hyperbolischer Basis).

---

*) Da es schwieriger ist, sich diese Fläche, als die vorigen, zu denken, so vergleiche man sie mit einem Sattel, dessen horizontale Durchschnitte Hyperbeln, und dessen senkrechte Parabeln sind.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Senff, Carl Julius,

Systematische Darstellung der Hauptsätze der Geometrie im Raume akad. Preisschr

Dorpat 1829

Bamberg, Staatsbibliothek -- Lyc.q.8#46
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11732066-6